Support de cours

Cours:

PHYS-101(f) - PG I - mécanique - MA (Sylvain Bréchet)

Vidéo:

A7 - Energie potentielle, énergie mécanique et résonance

Concepts (extraits des sous-titres générés automatiquement) :

Angle phi. Point matériel. Énergie potentielle. Point matériel de masse. Mouvement d'ossiation torsion. Sinus de phi. Énergie mécanique. Phi-chapo. Position d'équilibre. Termes du cosineus de phi. Distance d. Sinus de l'angle phi. Angle alpha. Vitesse du flux d'air. Fait de omega r.

vers la recherche de séquences vidéo
(dans PHYS-101(f) - PG I - mécanique - MA (Sylvain Bréchet).)

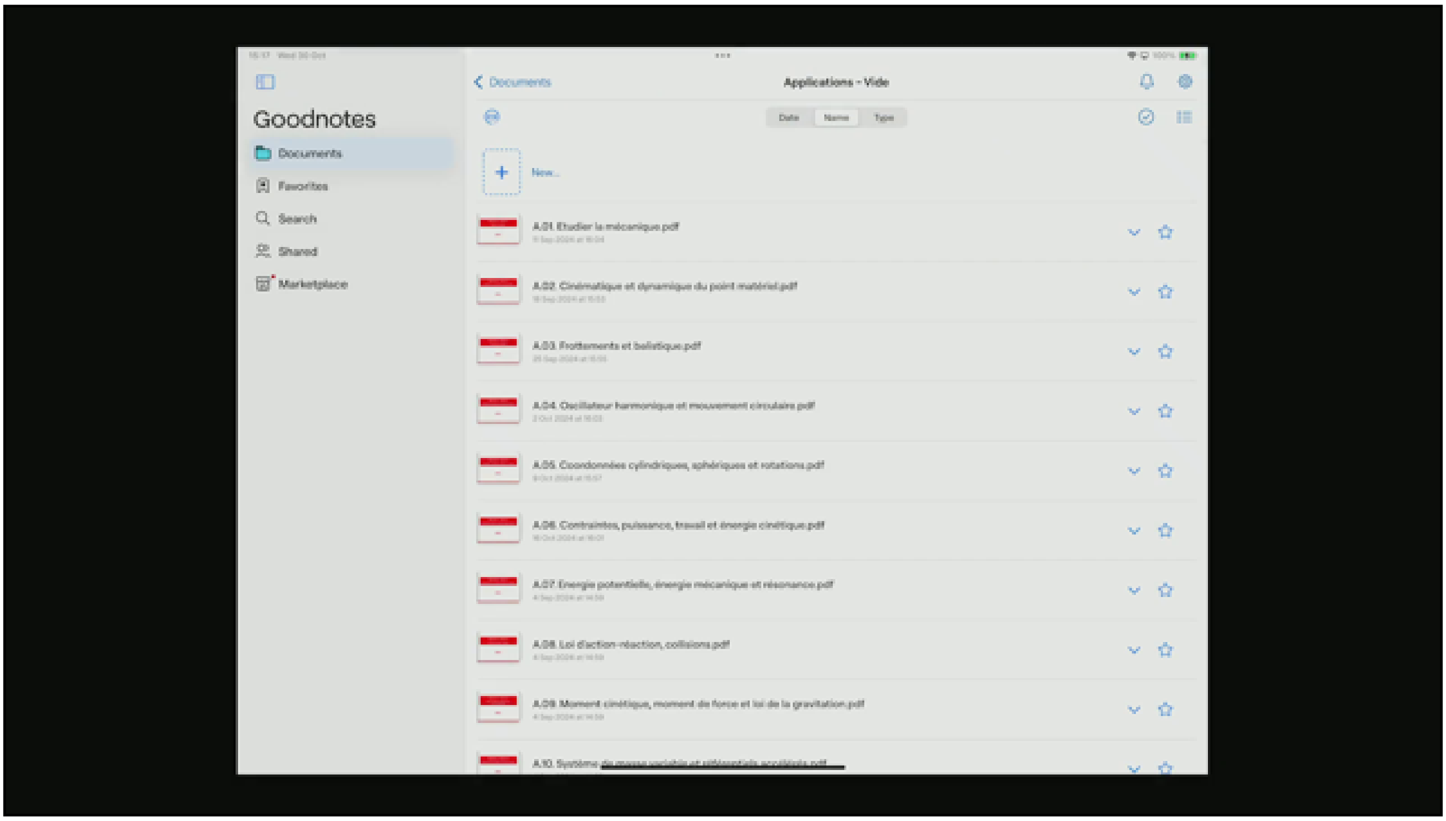
vers la vidéo

...

notes

résumé

0m 0s

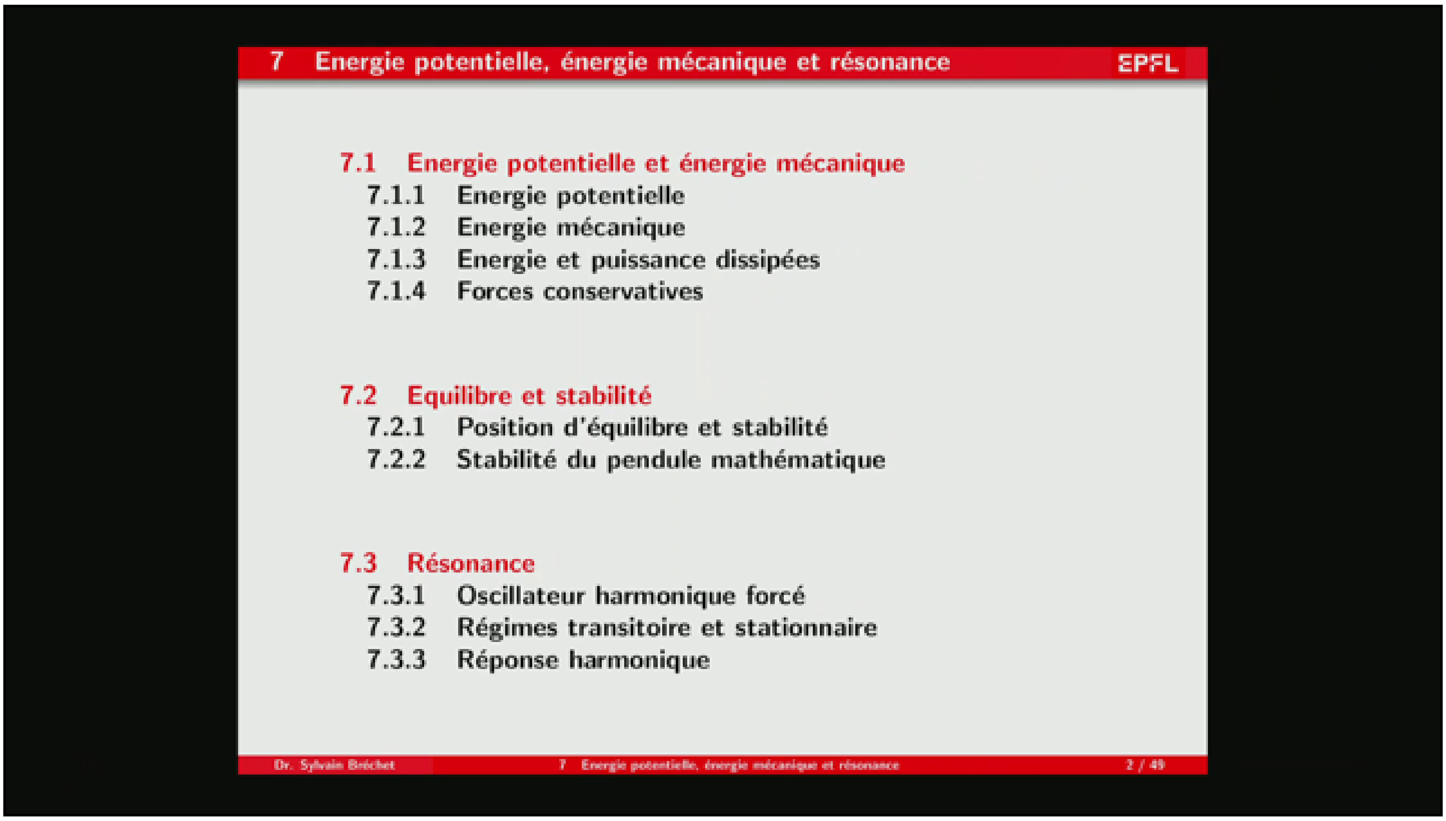


Ces sous-titres ont été générés automatiquement de l'expérience du pont Tacoma était utilisée pour le cours donné aux physiciens, raison pour laquelle on ne l'avait pas à disposition. J'en ai fait la demande. Voilà le modèle réduit et je vous propose qu'avant de passer aux applications de cours, on regarde encore cette expérience en live. C'est toujours mieux de voir l'expérience. C'est encore mieux que la vidéo parce que la vidéo on peut toujours dire qu'il y a peut-être des trucs âges. Il n'y en a pas en l'occurrence. C'est ce que vous allez voir. Donc... Le vent se lève sur la ville de Tacoma, sur la rivière Potomac. Le vent devient de plus en plus important. Et finalement, on arrive en résonance. La vitesse du flux d'air est-elle que l'élément de pont se met aussi en torsion avec un mouvement d'ossiation torsion dans l'amplitude est importante. Alors là on ne va pas faire se détruire le pont. On a envie de garder le modèle réduit. Donc finalement, le vent fait blis, l'orage est passé et le beau temps arrive. Si on pousse le vent au-dessus de la fréquence de résonance, je vais reprendre le

notes

résumé

0m 1s

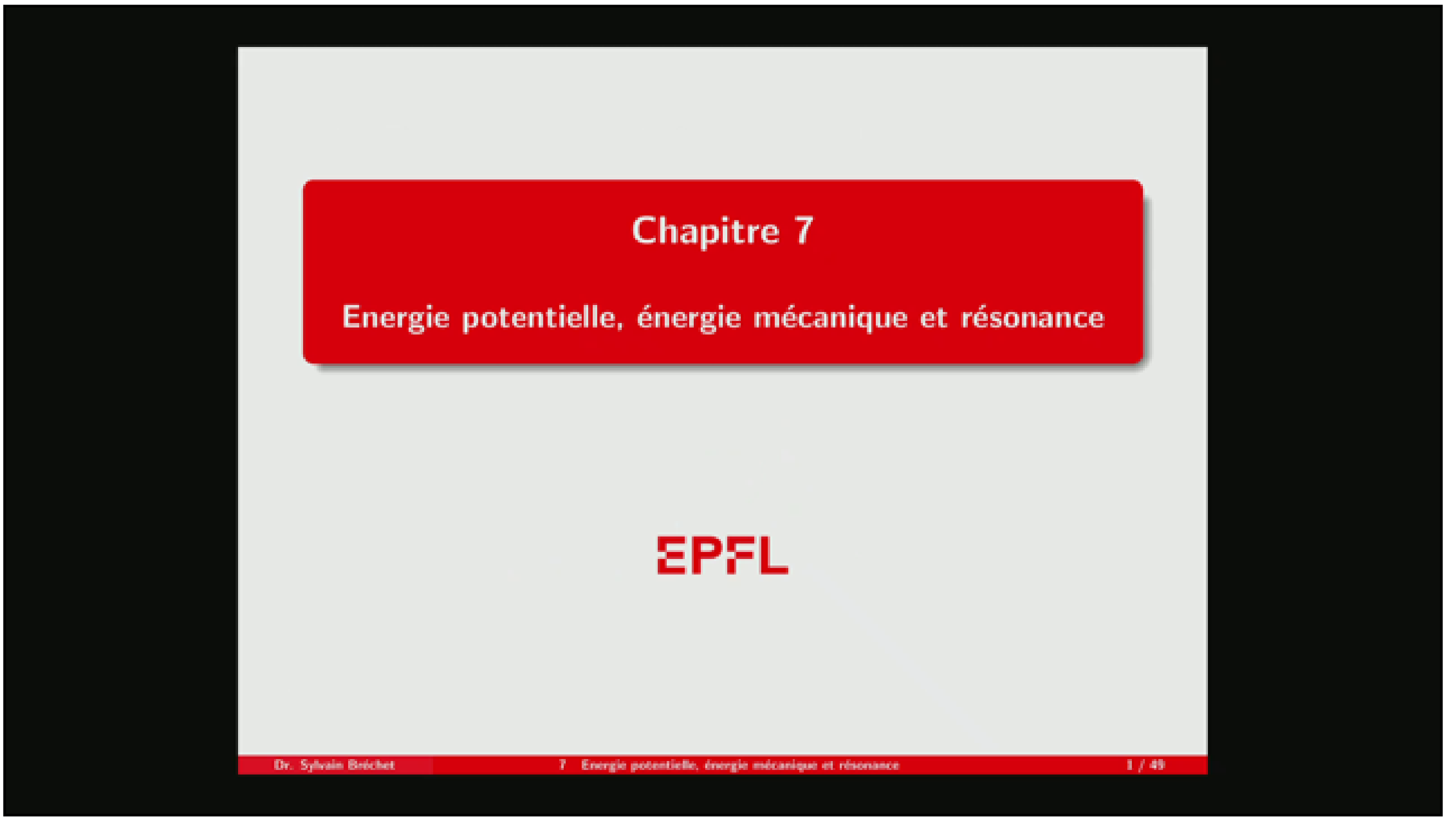


dessin de ce matin pour juste vous illustrer ça rapidement. Ce qui va se passer...

notes

résumé

1m 58s

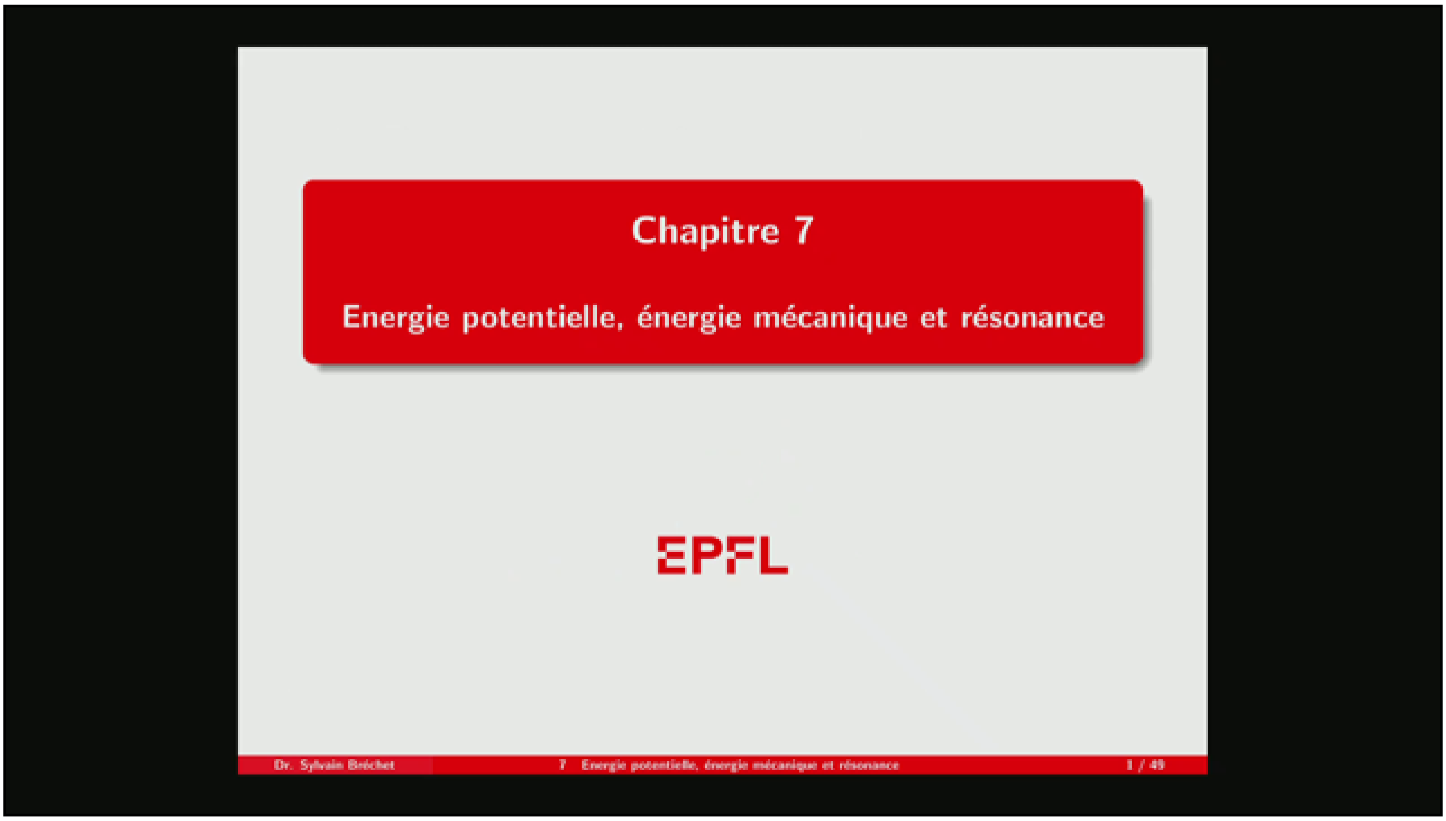


Je rappelle, apparemment, il y a des choses qui n'étaient pas claires par rapport à ce rapport. Ce rapport, c'est l'amplitude d'ossiation qui dépend de omega divisé par une valeur qu'on a lorsque omega est nul. D'accord ? Et plus le phénomène d'amplification d'ossiation est grande, plus on aura un pic important. D'accord ? On a cette résonance qui se manifeste. Et alors ce qu'on voit évidemment, c'est que si on fait augmenter omega qui se rapproche de omega 0, en fait de omega R pour être plus précis, et bien le rapport de rho de omega sur rho de 0 devient de plus en plus grand. On a un pic en omega 0 plutôt en omega R, mais si tau est très grand, omega R coincide quasiment avec omega 0. Et alors après, pour répondre à votre question, Martin, si omega devient plus grand, qu'est-ce qui se passe ? Et bien on redescend de ce pic. D'accord ? On le comprend intuitivement puisque si omega tend vers 0, omega de 0 sur omega de 0, ça fait 1. Donc évidemment que la fonction lorrencienne tend vers 1, initialement, et si l'ossiation est très très très rapide, et bien si la fréquence est trop grande, l'ossiation n'a plus le temps de se faire. D'accord ? Et donc notre courbe va tend vers 0 lorsque omega tend vers l'infini. Ok ? D'où ce comportement ? Avec ce pic, c'est piques d'ailleurs qui sont, comme je le disais ce matin, décalés par rapport à la valeur qu'on aurait en absence de frottement, qui est omega 0. D'accord ? Ça c'est dû au fait que omega R est légèrement inférieur à omega 0, et plus la viscosité est grande, plus le décalage est important, plus la viscosité est grande, plus le pic est petit, d'où ces décalages comme ceci, qu'on voit en termes des piques, qui ne sont pas alignés sur une belle

notes

résumé

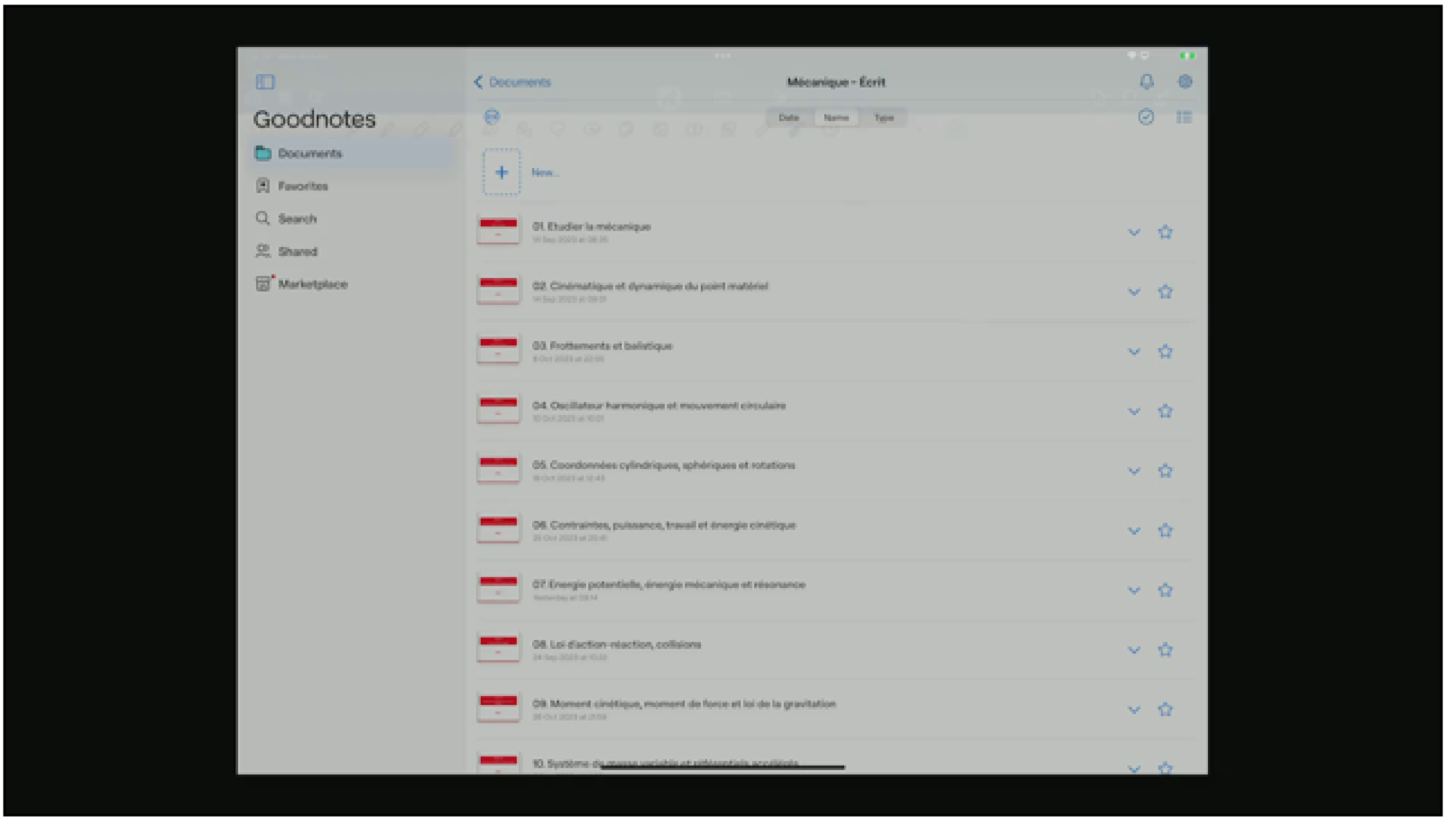
2m 7s



droite verticale. D'accord ?

notes

résumé



Alors pour vous rassurer tout de suite, il n'y aura pas de questions sur la résonance à l'examen. D'accord ? En revanche, c'est quand même un phénomène superbe qui vaut la peine d'être exploré, et ce n'est pas parce qu'un sujet n'est pas à l'examen, je ne vais pas vous l'enseigner, bien au contraire. D'accord ? Les sujets les plus intéressants que vous allez voir sont ceux qui ne sont pas à l'examen.

notes

résumé

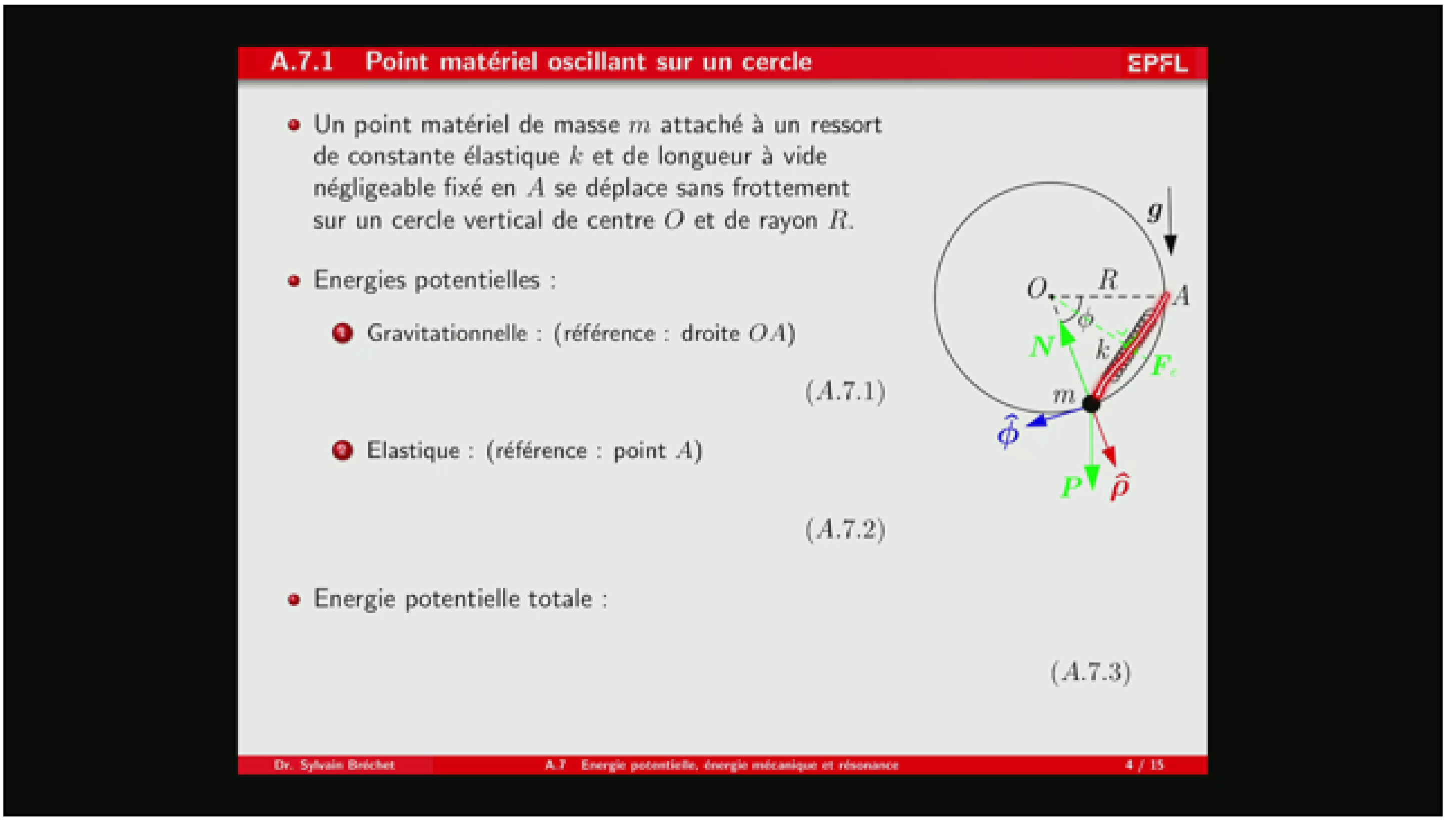
4m 14s

Par exemple, la dernière semaine. Ok ? Voilà. Comme ça, au moins c'est...

notes

résumé

4m 34s

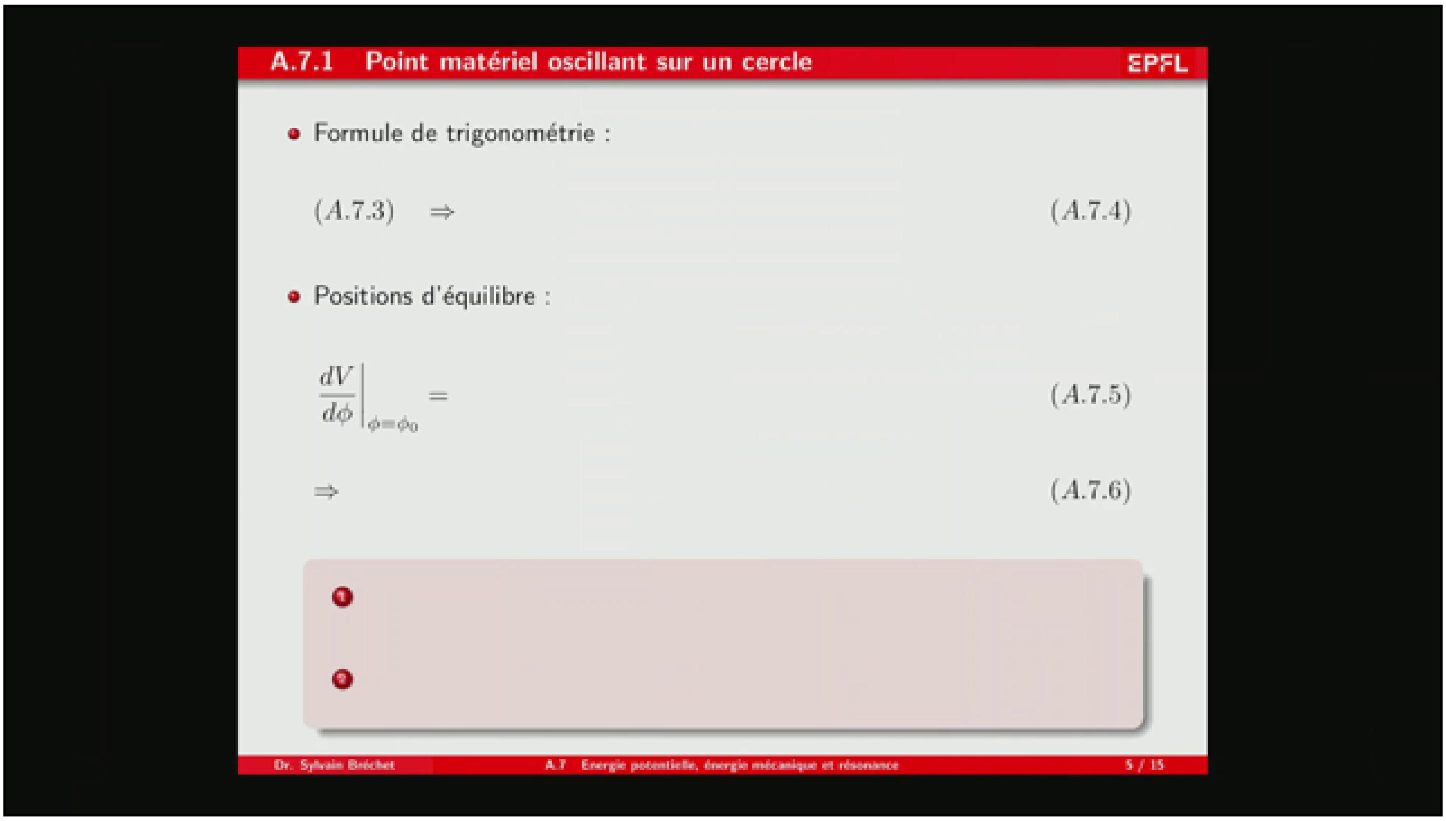


Oui, passons aux applications de cours de cette 7e semaine. On a parlé d'énergie, alors si la résonance n'est pas à l'examen, à coup sûr, l'énergie potentielle, les énergies signatiques et l'énergie mécanique seront au sujet de l'examen. D'accord ? Ça, il faut le comprendre et il faut savoir l'appliquer. Donc le genre d'exercice qu'on va faire maintenant, c'est le genre de problème que je pourrais vous demander à l'examen, même si celui-ci est assez technique sur le plan analytique, comme vous allez le voir. On va traiter du premier qui est le plus intéressant, si tant le permet, passera au deuxième. Le premier, c'est un point matériel qui est aussi sur un cercle dans un plan vertical. Donc il faut imaginer un cercle comme ceci. Sur ce cercle, vous avez un point matériel de masse M qui peut glisser sur le cercle sans frottement, qui est attaché à un ressort et ce ressort, il est lui-même fixé à un point qui est à la hauteur du centre du cercle. D'accord ? Pour simplifier les choses, vous voyez que c'est assez compliqué comme ça. Vous allez supposer que la longueur à vide du ressort est tellement petite qu'on peut la négliger.

notes

résumé

4m 43s

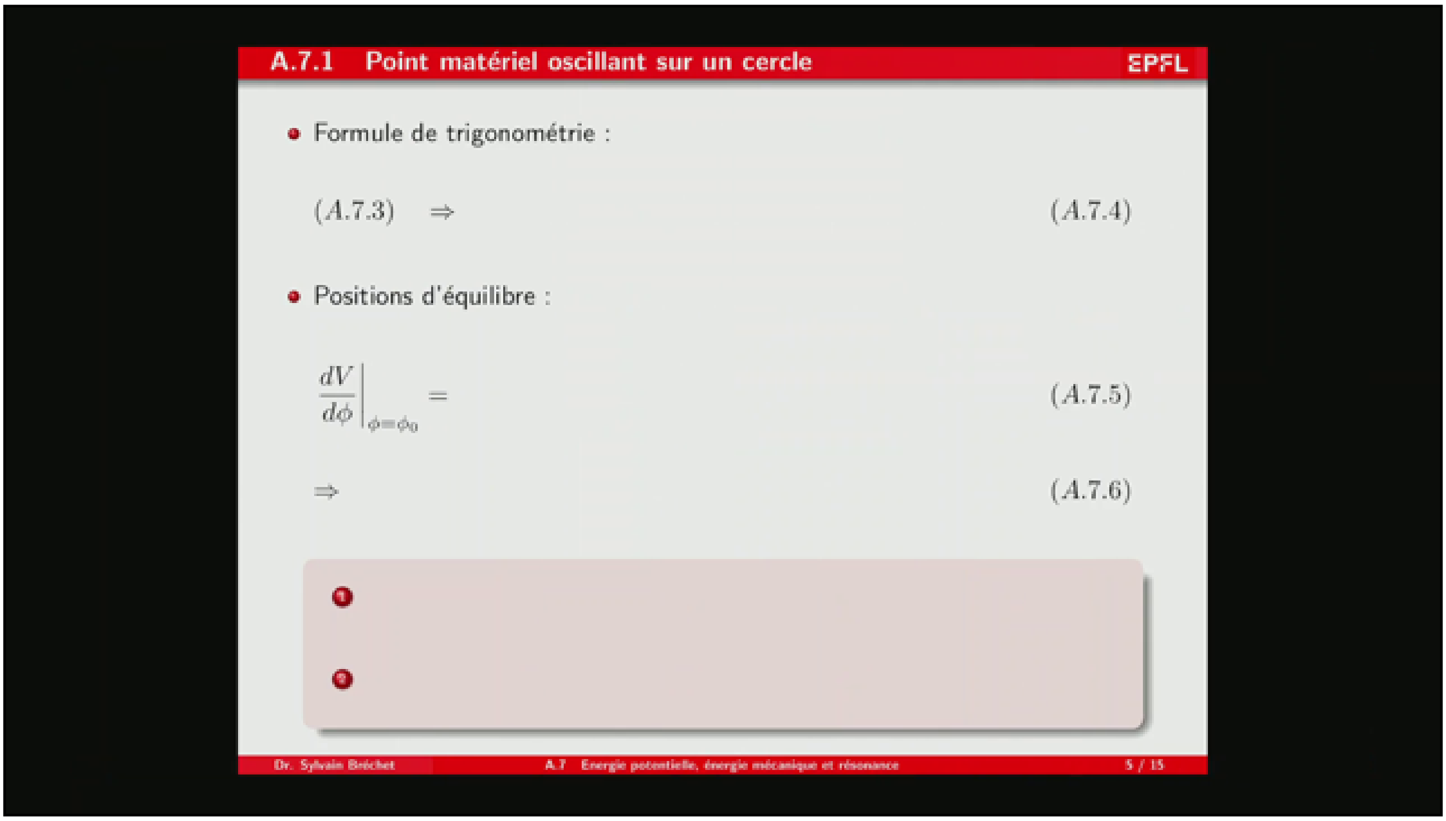


Donc la longueur que vous voyez ici, c'est carrément la déformation du ressort. Alors ce problème, on aimerait le traiter, non pas en passant par Newton, mais en utilisant tout de suite les énergies. Alors pour des raisons de symétrie, on a évidemment un mouvement qui se fait dans un plan vertical. On a un vecteur unitaire haut-chapo qui orientait radialement vers l'extérieur. On a pris un angle phi qui est nul lorsque le point matériel est au point A, au point d'attache du ressort. Et donc phi est orienté positivement dans le sens des aiguilles de montre, phi-chapo est orienté dans le même sens. D'accord ? Il y a trois forces qui interviennent. Il y a le poids qui est orienté verticalement vers le bas, la force élastique le long du ressort, la force de réaction normale qui contraint le point matériel à se déplacer dans l'anneau qui est orienté vers l'origine. Ok ? Combien y a-t-il d'énergie potentielle ? Combien y a-t-il de force conservative ? Il y a le poids et il y a la force élastique. Qu'en est-il de la force de réaction normale ? Elle est toujours orthogonal au déplacement, elle ne travaille pas, on ne va pas lui associer une énergie potentielle. Si on le voulait lui associer une énergie potentielle constante, ça n'apporterait strictement rien. D'accord ? Donc il y a deux énergies potentielles, une de pesanteur ou gravitationnelle associée au poids, l'autre élastique. Il faut définir correctement les références. Alors, prenons l'énergie potentielle de pesanteur. Ce qui se prête naturellement à nous, c'est de prendre par exemple une droite horizontale qui passe par l'origine. On aurait aussi pu la prendre au bas du cercle. D'accord ? Prenons la droite qui passe par l'origine, ce sera plus simple pour les calculs. Donc maintenant, le poids matériel ici sur le dessin, vous le voyez clairement, il va être en dessous du point d'attache. Donc

notes

résumé

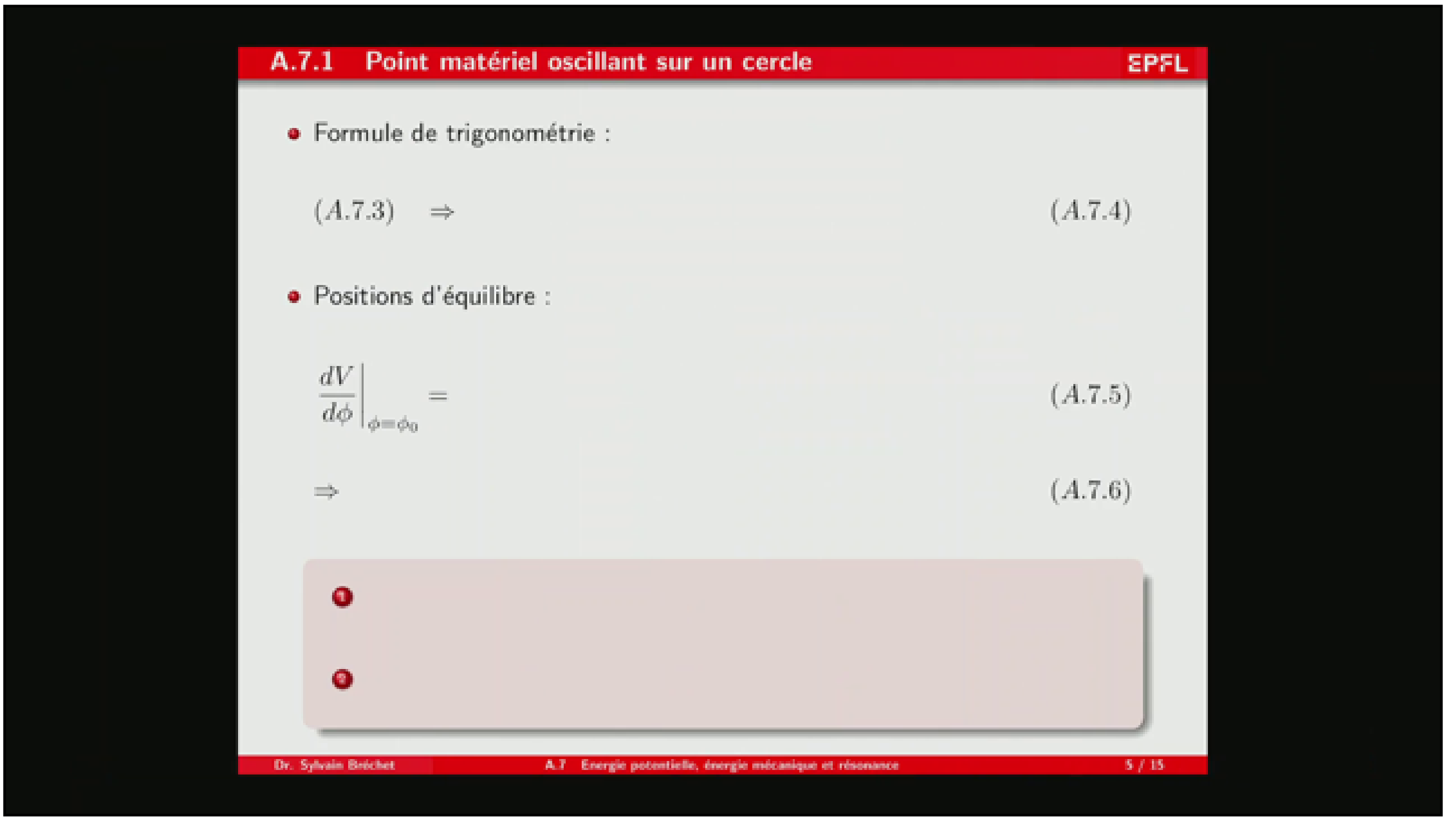
5m 49s



il va avoir une coordonnée verticale qui est négative. Il faudra qu'on trouve ces distances-là qui les aident. Ces distances, on la voit tout de suite. C'est le rayon du cercle, qu'on projette ici sur le cathète opposé à l'angle phi. C'est donc le rayon R fois le sinus de phi. Donc maintenant, si on écrit l'énergie potentielle de pesanteur, Vg, c'est le poids, Mg, fois la coordonnée verticale négative, qui est le rayon, fois le sinus de l'angle phi, avec un signe moins. Ce qui est plus compliqué, c'est l'énergie potentielle élastique. Alors ça, a priori, on peut se demander comment on va réussir à la définir. Ok ? C'est l'énergie potentielle élastique, c'est une demi. Dans la constante élastique, il faut la déformation au carré. C'est quoi cette déformation ? Comment on a négliger la longueur à ville ? C'est la longueur du ressort. Oui, mais il faut quoi la longueur du ressort ? Pour s'en sortir, quand on a un triangle isocèle, on peut le voir comme deux triangles rectangles. Donc ici, on a un rayon R, ici aussi. Ceci est donc un triangle isocèle. Qu'on divise en deux en créant deux triangles rectangles. L'angle au sommet de chacun de ces triangles rectangles, c'est phi sur deux. On a des rayons R, qui sont les hypothénieuses. On peut donc trouver le cathètes opposé à l'angle phi sur deux. Le cathètes qui est ici, par exemple, le même qui est là, qui va être quoi ? Qui va être R, fois le sinus de phi sur deux. Donc on a deux fois cette longueur. La déformation se sera donc, deux R, fois le sinus de phi sur deux. Évidemment, il faut l'élever au carré. En commandant l'énergie potentielle totale, c'est la somme de l'énergie potentielle de pesanteur, plus l'énergie potentielle élastique. En développant un tout petit peu l'énergie potentielle élastique, on peut l'écrire comme 2K, fois R carré,

notes

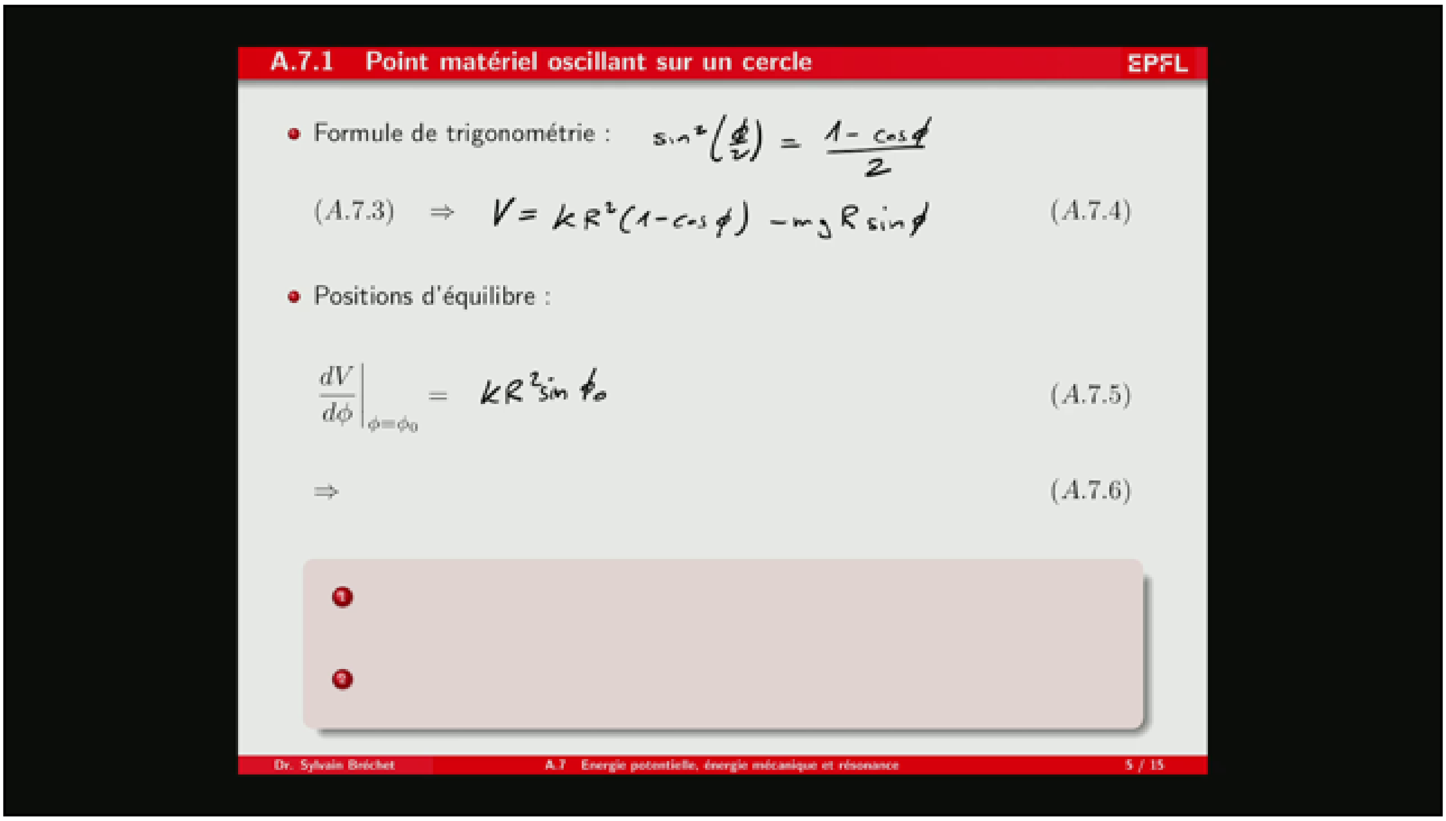
résumé



fois le sinus au carré de phi sur deux. Pour l'énergie potentielle de pesanteur, on a moins Mg R, fois le sinus de phi. Alors là, on a une structure qui n'est pas très sympathique pour être honnête. Pourquoi ? Parce qu'on a d'une part une fonction trigonométrique, à savoir un sinus de l'angle phi, et on a une fonction trigonométrique, un sinus carré, mais maintenant, dans la moitié de l'angle phi. Ça serait quand même plus simple d'avoir des fonctions trigonométriques du même angle. Par exemple, l'angle phi. Alors il y a une solution. Cette solution, on passe par la trigo. Il y a une formule trigo qui va nous permettre

notes

résumé

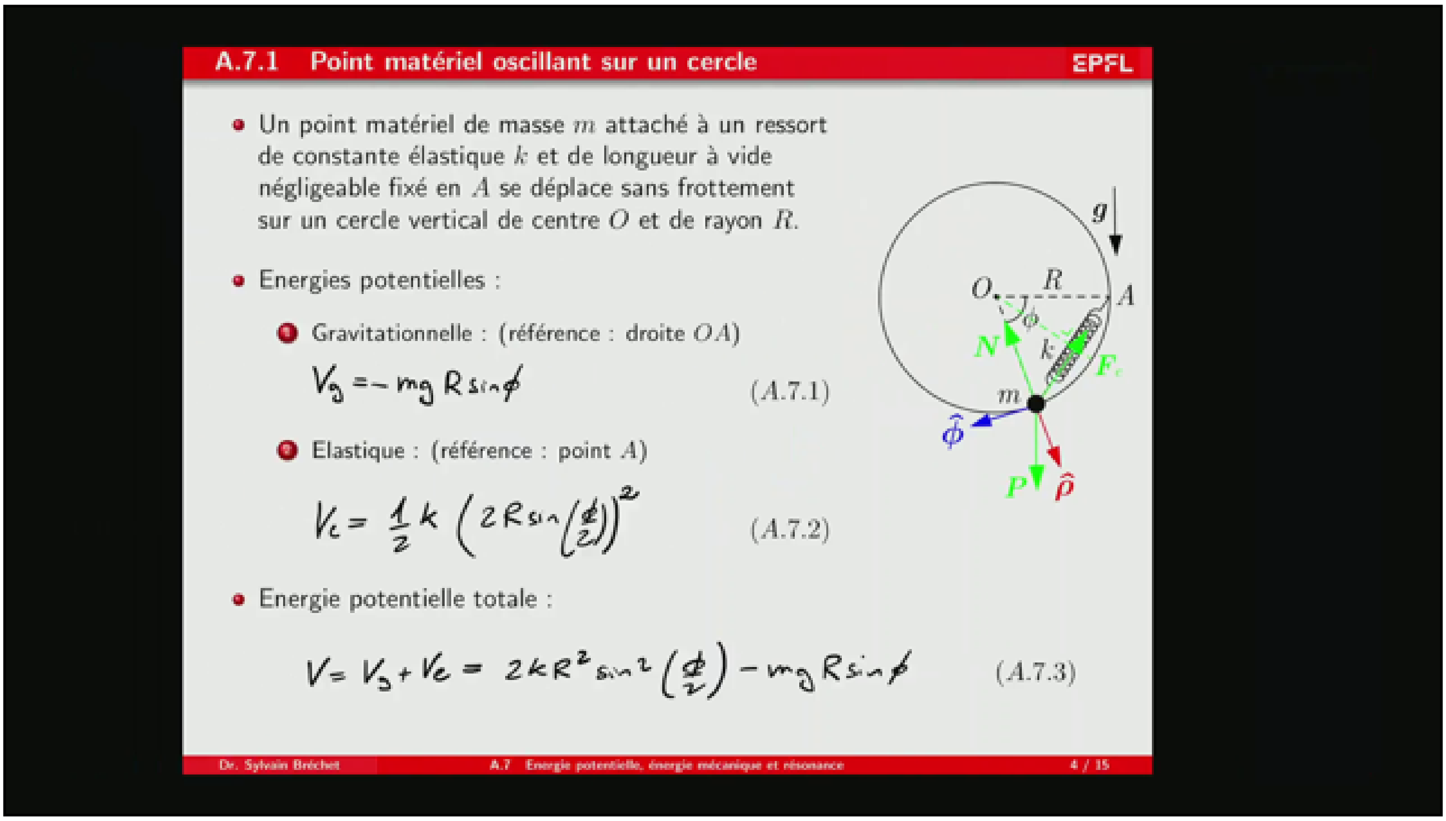


d'exprimer le sinus carré de phi sur deux en termes du cosineus de phi. Cette formule, c'est la suivante. Le sinus carré de phi sur deux, c'est 1 moins le cosineus de phi divisé par 2 en utilisant les formules sur les produits sommes de sinus et de cosineus. Vous allez pouvoir retrouver cette formule en prenant deux fois le même angle, par exemple, qui est l'angle de phi sur deux. Alors on fait la substitution et maintenant, l'énergie potentielle totale, c'est KR carré qui multiplie 1 moins le cosineus de phi moins MgR fois le sineus de phi. Alors là, disons que la position d'équilibre n'est pas tout de suite évidente. Intuitivement. Mais par le calcul, on peut la trouver. Comment est-ce qu'on la trouve ? La force est nulle à l'équilibre. La force est nulle, ça veut dire que la dérivé de l'énergie potentielle est nulle, donc l'énergie potentielle est extrémale à l'équilibre et l'angle d'équilibre pour l'appeler phi0. Donc on va dériver la fonction de phi qu'on vient de trouver par rapport à phi, et on va l'évaluer en phi égal phi0 à l'équilibre. Par définition, elle doit s'annuler puisque c'est une position d'équilibre. Donc dérivons la dérivé de 1, c'est 0, la dérivé de moins que sinus par rapport à l'angle, c'est le sinus. Évaluer en phi0, ce sera k r² fois le sinus de phi0. Ensuite, la dérivé du sinus,

notes

résumé

10m 12s

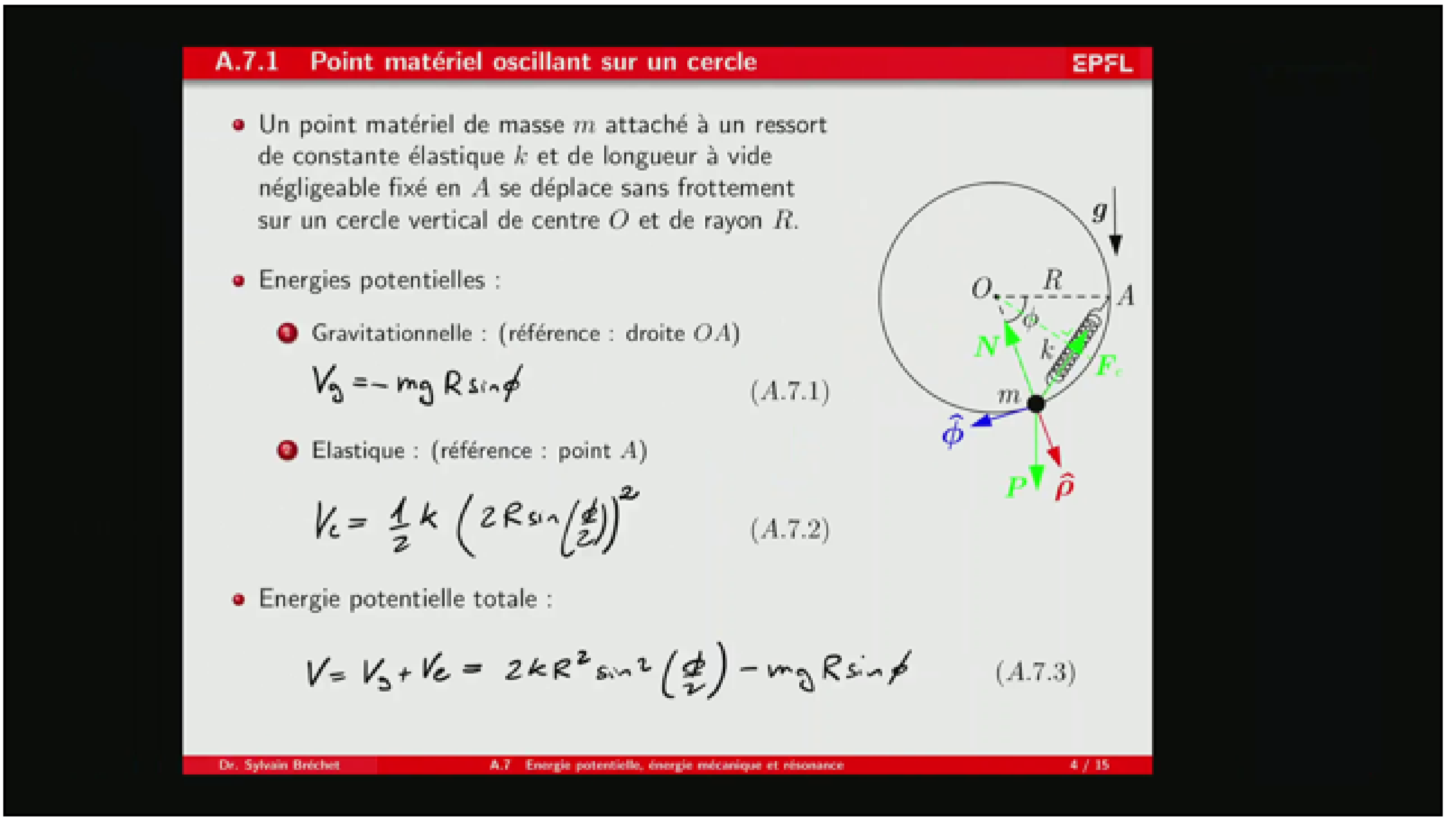


c'est le cosineus, on évalue en phi0, on va se retrouver avec un moins mgr fois le cosineus de phi0, et ceci, ça nule. Bon. Qu'est-ce qu'on peut tirer d'intéressant d'une telle relation ? On a à la fois un sinus et un cosineus. Donc on va s'intéresser au rapport des deux, qui est la tangente. On arrive à la conclusion que le rapport du sinus sur le cosineus de phi, qui est la tangente de phi0, c'est le sinus de phi0 divisé par le cosineus de phi0, contenu de la relation précédente, c'est simplement le rapport de mg sur k r. Toutes les grandeurs sont positives. Donc forcément que la position, l'angle qui va satisfaire cette relation, va se trouver dans l'intervalle qui va de 0 non compris, à p sur 2 non compris, soit dans le premier cadran trigonométrique. D'accord ? Oui, mais quelle est la périodicité de la fonction tangente ? C'est ? Oui. Exactement. Un cercle, c'est deux pis. Donc sur un cercle complet, c'est deux positions d'équilibre. Une première position d'équilibre, phi0, qui va être l'arc tangente de mg sur k r. Et donc cette première solution d'équilibre, sur le premier angle d'équilibre, on va l'appeler phi1, il se trouve donc dans l'intervalle qui va de 0 non compris, à p sur 2 non compris, dans le premier cadran trigonométrique. Et puis si cet angle-là est solution, cet angle plus pi, dû à la périodicité de la tangente, sera aussi solution. Donc on a un deuxième angle d'équilibre, qui est l'arc tangente de mg sur k r. D'accord ? J'ai oublié de terminer. Plus pi, qu'on va appeler phi2. Donc si phi1 se trouve dans le premier cadran trigonométrique, phi2, qui est phi1 plus pi, lui, ça trouvera dans le troisième cadran trigonométrique, soit dans l'intervalle qui va de p non compris, à 3pi sur 2 non compris. D'accord ? Alors concrètement, avec la géométrique,

notes

résumé

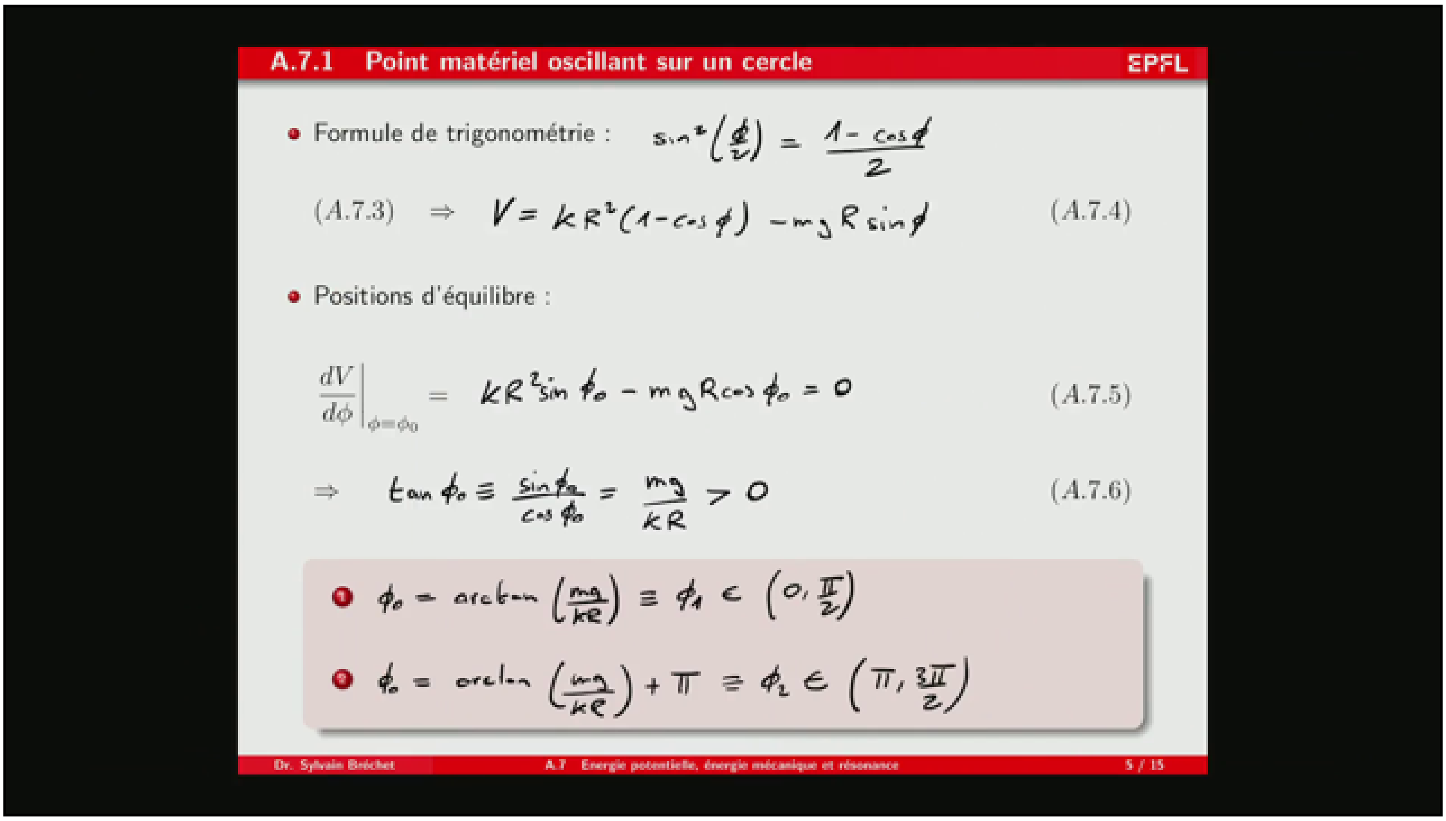
11m 49s



on a imposé un autre problème.

notes

résumé

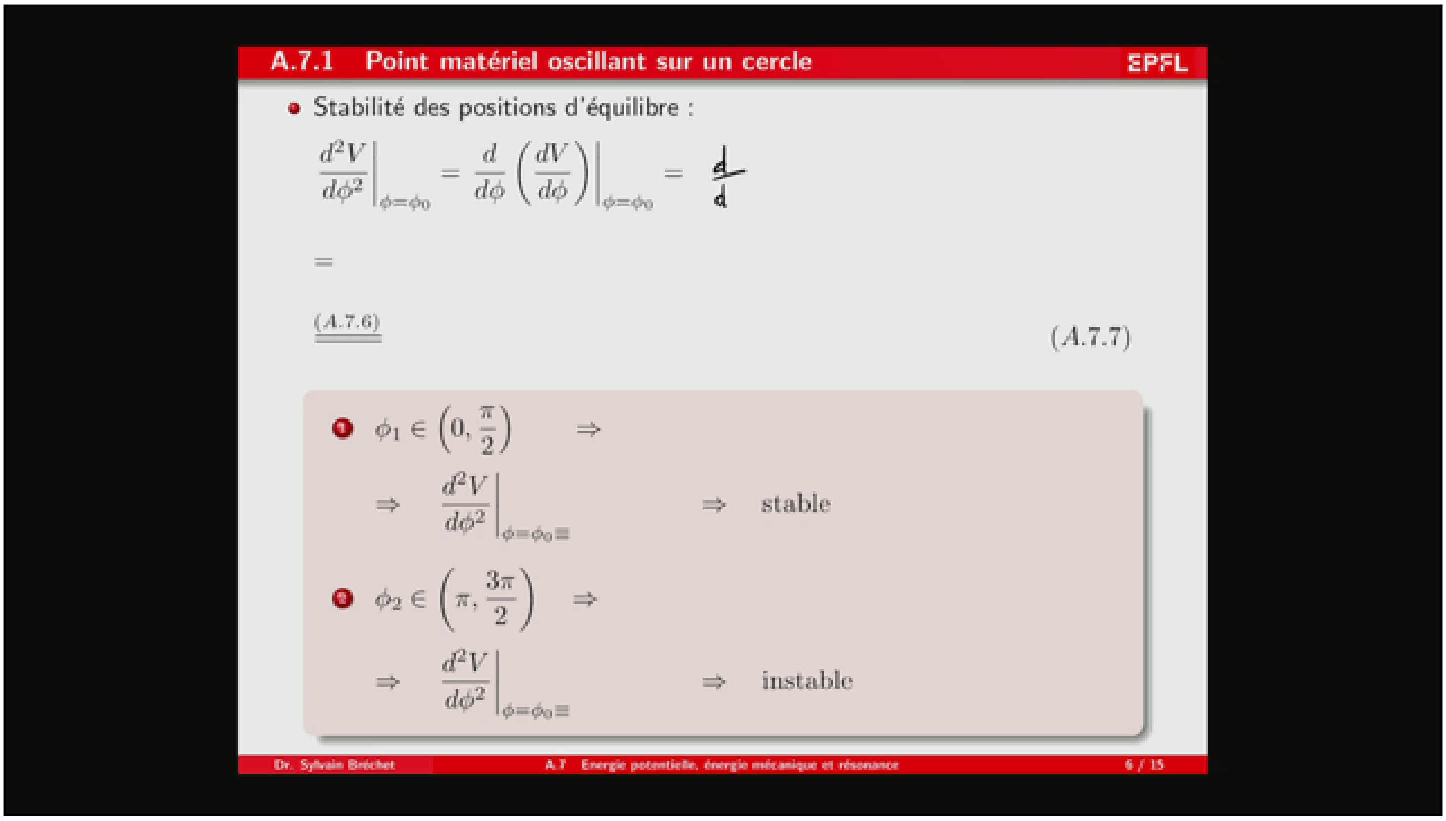


Revenons en arrière. Si la masse se trouve ici au point A, l'angle phi est nul. Donc un an qui varie entre 0 et pi sur 2 correspond à un an qui se trouve dans cette portion du cercle. Maintenant, vous ajoutez pi, on se retrouve dans cette autre portion du cercle. Clairement, intuitivement, on peut imaginer une position d'équilibre par là. C'est raisonnable. La position d'équilibre ici, elle paraît nettement moins intuitive et pour cause, elle ne l'est pas. Donc elle est instable. C'est la première qui sera stable. On va démontrer la stabilité respectivement, la non-stabilité, l'instabilité de la position d'équilibre qui sera ici, la deuxième position.

notes

résumé

14m 12s

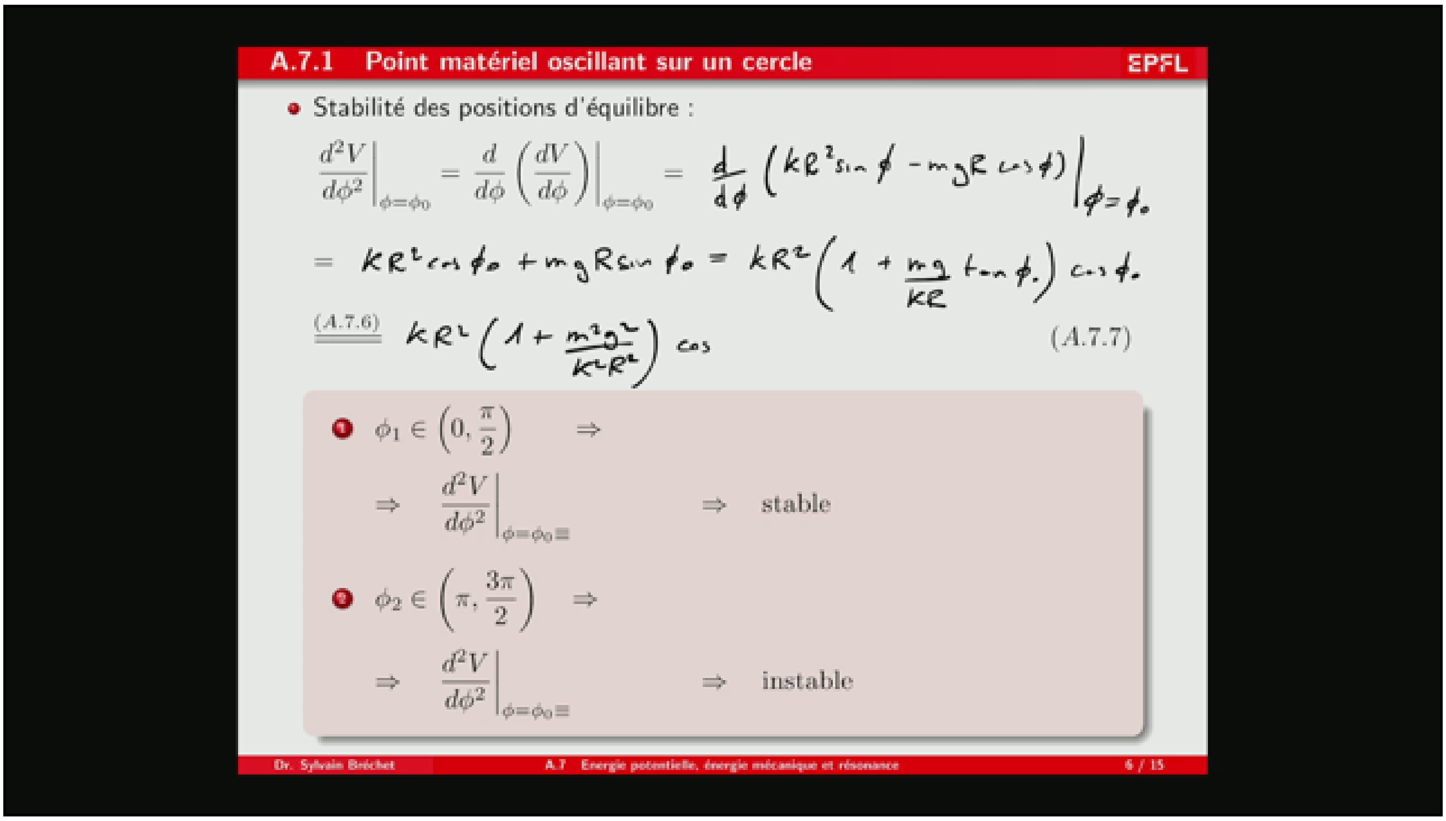


Bon. Alors, pour déterminer la stabilité, il n'y a qu'un moyen, c'est de calculer la dérivée seconde de l'énergie potentielle par rapport au degré-déberté qui est ici, l'angle phi. Alors, comme on a déjà calculé la dérivée première, on ne va pas réinventer la roue, on va partir de ce résultat et dériver une deuxième fois. Donc on va calculer la dérivée

notes

résumé

14m 51s

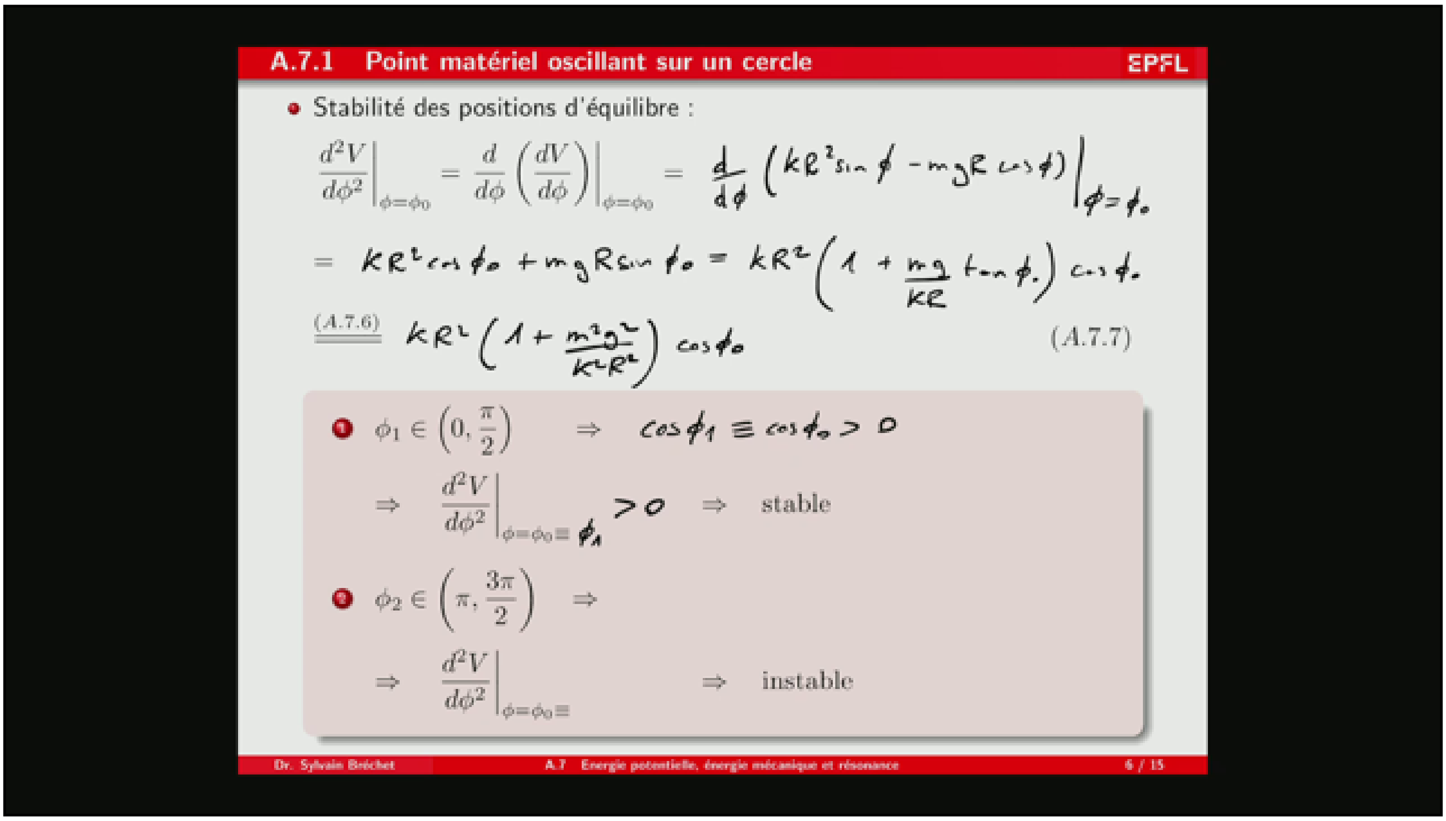


par rapport à phi, de la dérivée première qui est K r² sinus de phi, moins M g r cosinus de phi, qu'on évaluera donc en phi égal phi zéro soit à l'équilibre. Ok ? La dérivée du sinus, c'est le cosinus, on aura K r² cosinus de phi zéro. La dérivée de moins le cosinus, c'est le sinus, on aura donc plus M g r sinus de phi zéro. Oui, mais la tangente de phi zéro, on la connaît, c'est M g sur K r. Donc on aimerait la faire apparaître. Comment est-ce qu'on peut faire ça ? Eh bien, par exemple, en mettant en évidence le cosinus de phi zéro. Ok ? Donc on va écrire, on va faire mieux que ça, on va mettre en évidence à la fois K r², je laisse un peu de place, et le cosinus de phi zéro. Et donc on aura 1, plus M g sur K r, fois la tangente de phi zéro. Ok ? Et puis la tangente de phi zéro, c'est aussi M g sur K r. Donc, ce sera K r², qui multiplie 1 plus M² g² sur K² r², le tout, fois le cosinus de phi zéro.

notes

résumé

15m 14s

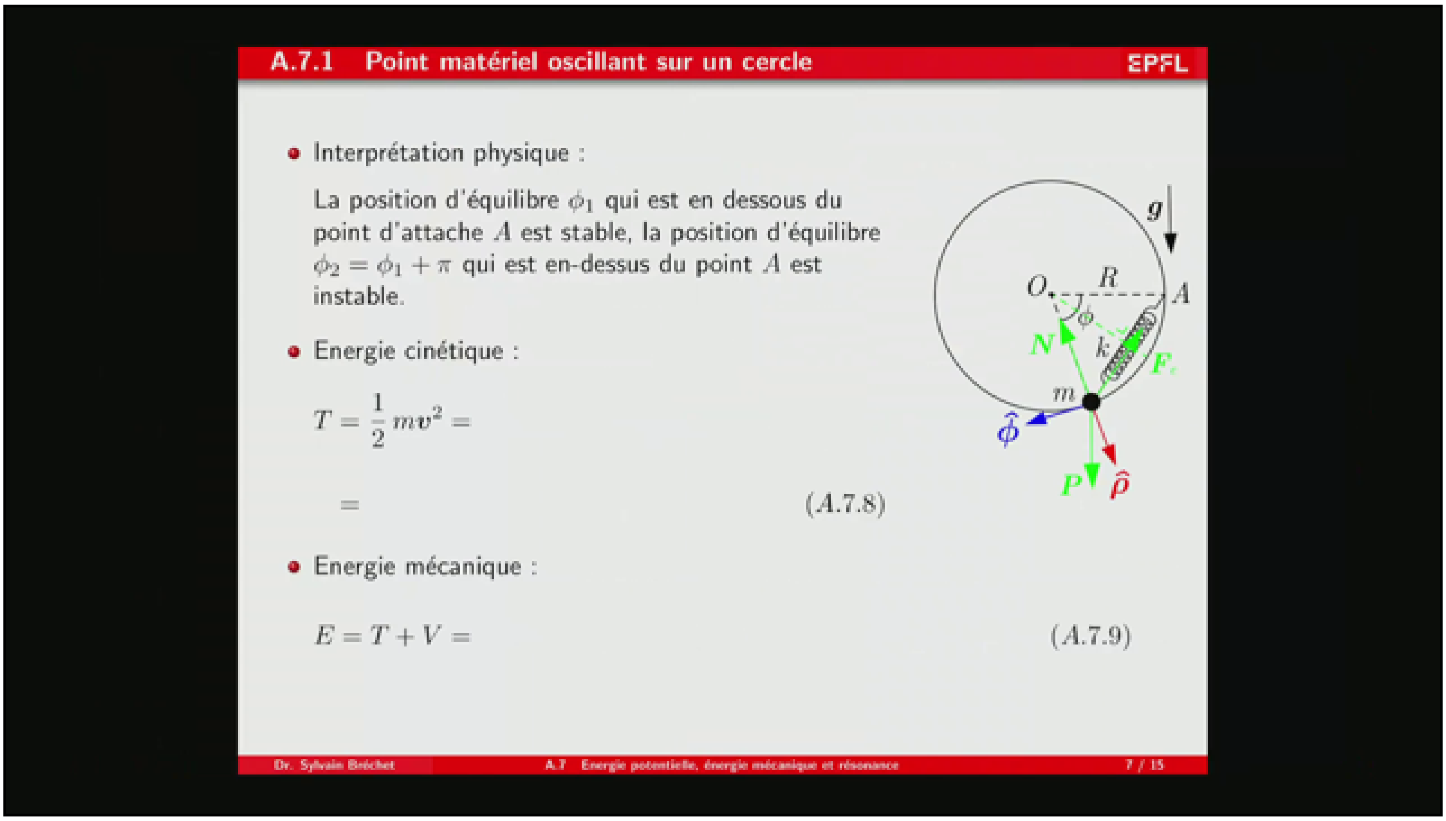


K r, M, g, sont tous positifs. Donc, ce qui nous intéresse pour la stabilité, c'est le signe de cette dérivé seconde. Le signe se cache intégralement dans le cosinus de phi zéro. Ok ? Alors il y a 2 solutions. Il y a une première solution, qu'on pressant instable, lorsque le point matériel se trouve en-dessous du point d'attache. C'est-à-dire, lorsque l'angle d'équilibre est dans l'intervalle qui va de zéro non compris à p sur de non compris. Pour cette intervalle-là, par définition, le cosinus de l'angle d'équilibre est ici 1, qui est ici notre cosinus de phi zéro. D'accord ? Et positif. Donc, si on évalue la dérivé seconde de l'énergie potentielle par rapport à phi, en phi 1, on a un résultat qui est positif. On a donc une position d'équilibre qui est stable. Si on fait le même exercice maintenant pour le deuxième angle d'équilibre, phi 2, qui se retrouve dans le troisième cadran trigonométrique, par définition,

notes

résumé

16m 35s

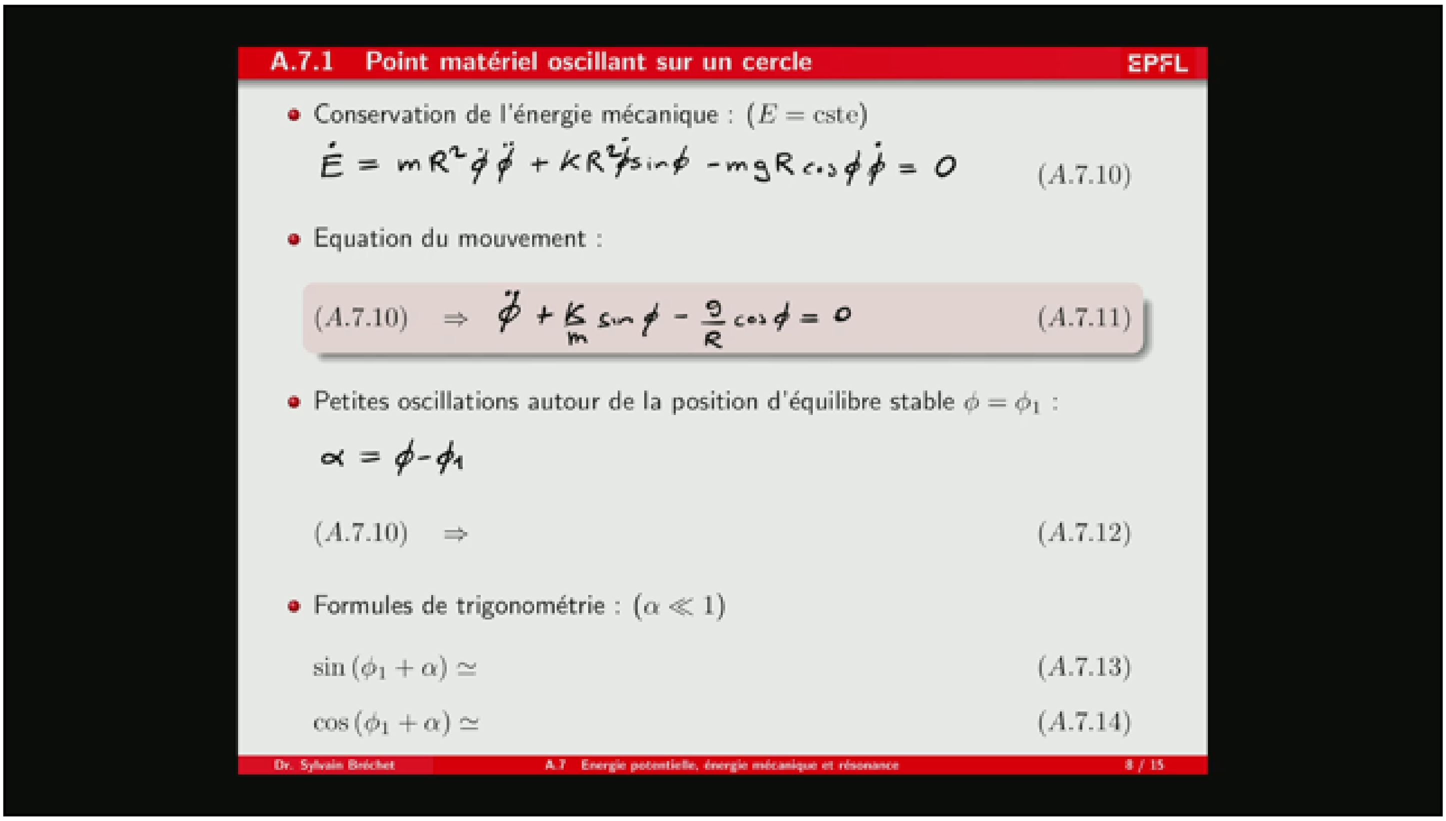


le cosinus de cet angle-là sera, lui, strictement négatif. Ok ? Donc, si on évalue la dérivé seconde de l'énergie potentielle totale par rapport à phi en phi 2, on a un résultat qui est négatif. C'est donc instable. Ce qu'on pressentait du point de vue physique, du point de vue intuitif est correct du point de vue mathématique. Donc, ça, c'est le genre de raisonnement que vous devriez faire. Réfléchissez physiquement en vous disant est-ce que la solution, elle me paraît intuitivement stable. Si la réponse est non, elle sera plus stable. Une fois que vous avez visualisé la chose, vous faites le calcul, il faudrait donc que le calcul mathématique corroborre l'intuition physique ou géométrique que vous avez pu avoir. D'accord ? Alors,

notes

résumé

17m 37s

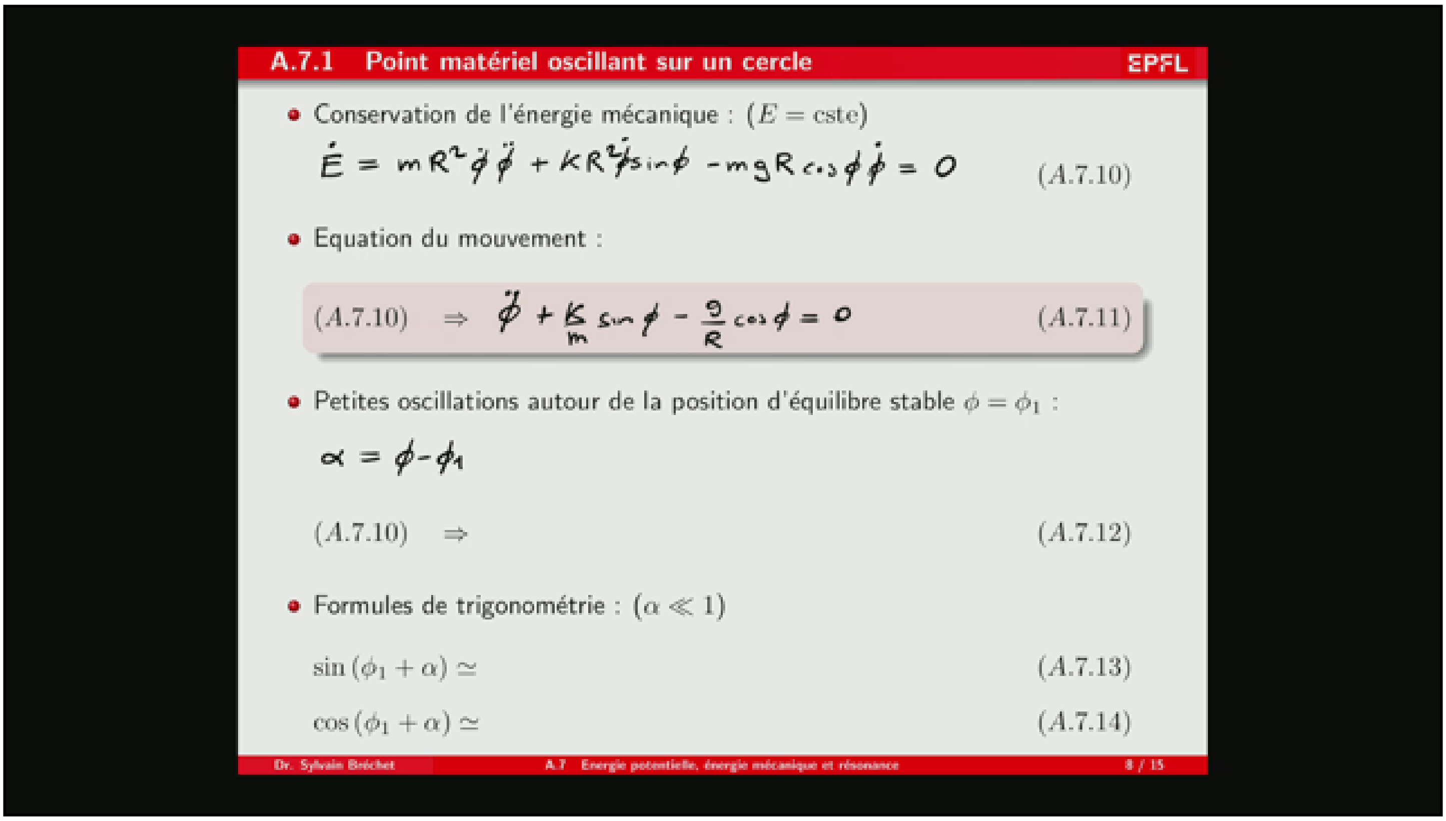


maintenant qu'on a trouvé la position d'équilibre stable, on va aller un peu plus loin. Si elle est stable, qu'est-ce que ça signifie ? Ça signifie que si le point matériel se trouve pas à tout à fait en position d'équilibre mais au voisinage, il va osciller autour d'un position d'équilibre stable. On aura donc un mouvement harmonico-ciatoire autour de cette position et c'est ce mouvement qu'on aimerait maintenant déterminer. D'accord ? Alors, comment est-ce qu'on peut faire ça ? Eh bien, il y a une technique très élégante qu'on va employer. L'énergie mécanique, elle est constante. Donc, si on la dérive par rapport au temps, le résultat doit être nul. Et ça, ça va nous livrer sur un plateau l'équation du mouvement. D'accord ? Vous allez voir. L'énergie sciétique, c'est une demi de la masse fois la vitesse au carré. Bon. La vitesse, c'est quoi ? C'est la vitesse du point matériel qui est une vitesse tangentiale. Donc, cette vitesse tangentiale, la vitesse calère, c'est le rayon fois la vitesse angulaire. R fois phi point. Faut que le vecteur unitaire fiche à peau. Si on le fait une fois explicitement, c'est une demi de la masse. Faut que le produit se calère du vecteur vitesse avec, c'est-à-dire, de R phi point phi chapeau avec R phi point phi chapeau. Le produit se calère de phi chapeau avec lui-même, lui donne un. Il va nous rester sans surprise une demi de la masse fois le rayon au carré, fois la vitesse angulaire au carré. Très bien. On a l'énergie potentielle totale. On a l'énergie signétique. Il n'y a plus qu'à les additionner pour trouver l'énergie mécanique. Et c'est ce qu'on va faire maintenant. On aura donc une demi de la masse fois le rayon au carré, fois phi point au carré, plus l'énergie potentielle, qui est l'énergie potentielle élastique, KR carré, qui multiplie un moins que sinus de phi, ainsi

notes

résumé

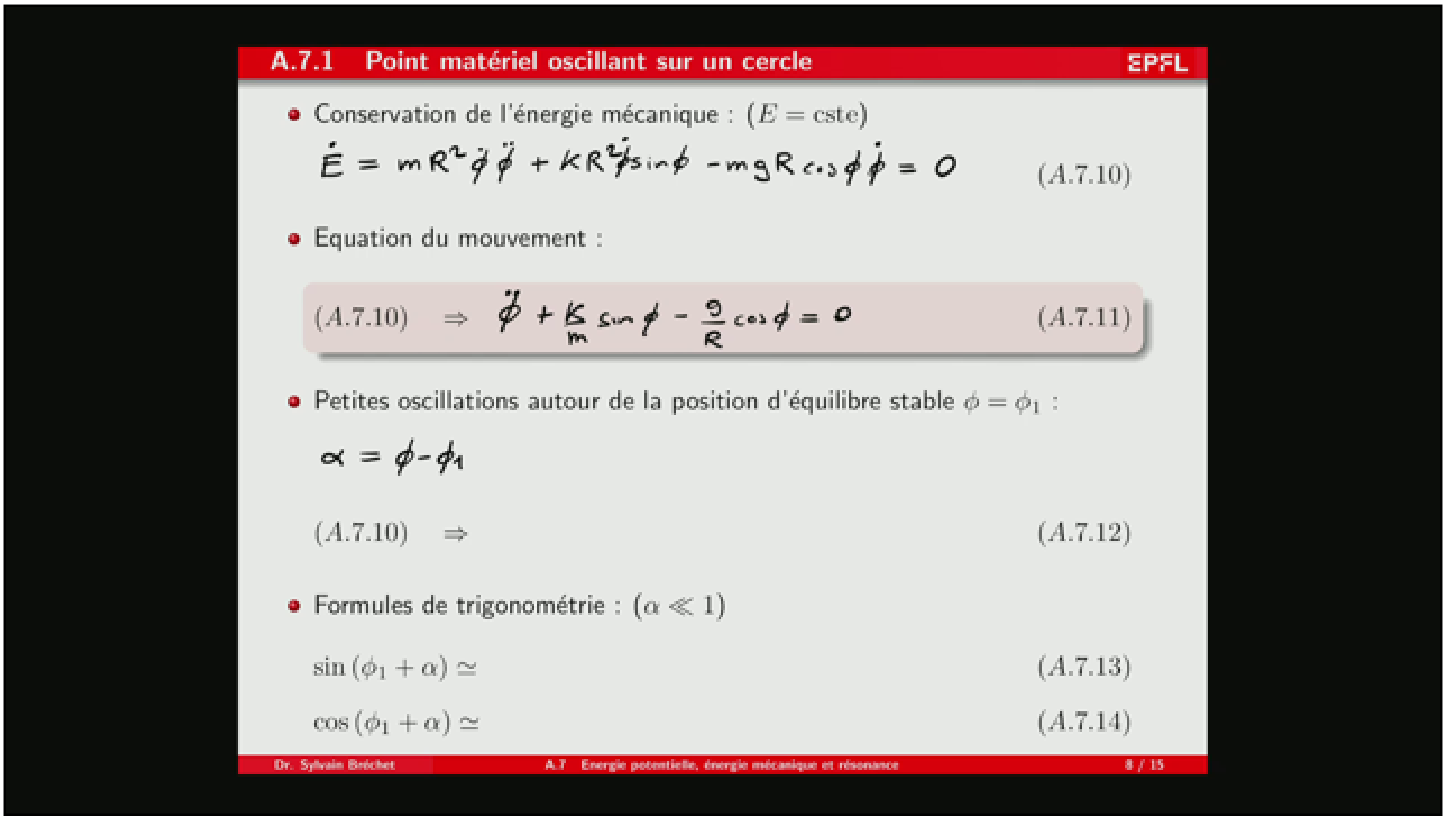
18m 27s



que l'énergie potentielle de pesanteur, qui est moins MGR fois le sinus de phi. Qui est définie à une constante près, on aurait pu prendre d'autres références. C'est pas la valeur d'énergie qui compte. C'est la manière dont elle varie. C'est ce qu'on va voir maintenant. Parce que pour trouver l'équation du mouvement, on va faire varier l'énergie. On la fait varier au cours du temps, calculer sa dérivé temporelle. Et comme l'énergie mécanique est constante, on impose que cette dérivé temporelle est nue. Ok ? Donc il faut garder à l'esprit cette équation-là. Parce qu'on va maintenant la dériver par rapport au temps. On va calculer un point. Très bien. Alors dérivons d'abord l'énergie signétique. On va se retrouver avec un MGR qui est constant. On dérive par rapport au temps une demi de phi point carré. Ce qui va nous donner deux fois une demi soit une fois phi point, il faut aller bien ternes, phi point point. Donc on a phi point, il faut avoir phi point point. Ok ? Ensuite, prenons l'énergie potentielle et la stique. On va se retrouver avec un carrière carré. Et il faudra qu'on calcule la dérivé temporelle de 1 moins le cocinus de phi. La dérivé temporelle de 1 c'est 0. La dérivé temporelle de l'opposé du cocinus c'est le sinus fois la dérivé interne qui a phi point. D'accord ? Donc on aura le sinus de phi. Je vais mettre de phi point ici. Et puis il faut qu'on fasse la même chose avec le dernier terme, le dernier terme qui était moins MG sinus phi. Bon, on va mettre moins MG en évidence, moins MGR en évidence et on calcule la dérivé temporelle du sinus de phi qui est le cocinus de phi fois la dérivé interne qui a phi point. D'accord ? Qu'est-ce que vous constatez en regardant cette équation ? Alors, on peut déjà écrire que l'énergie

notes

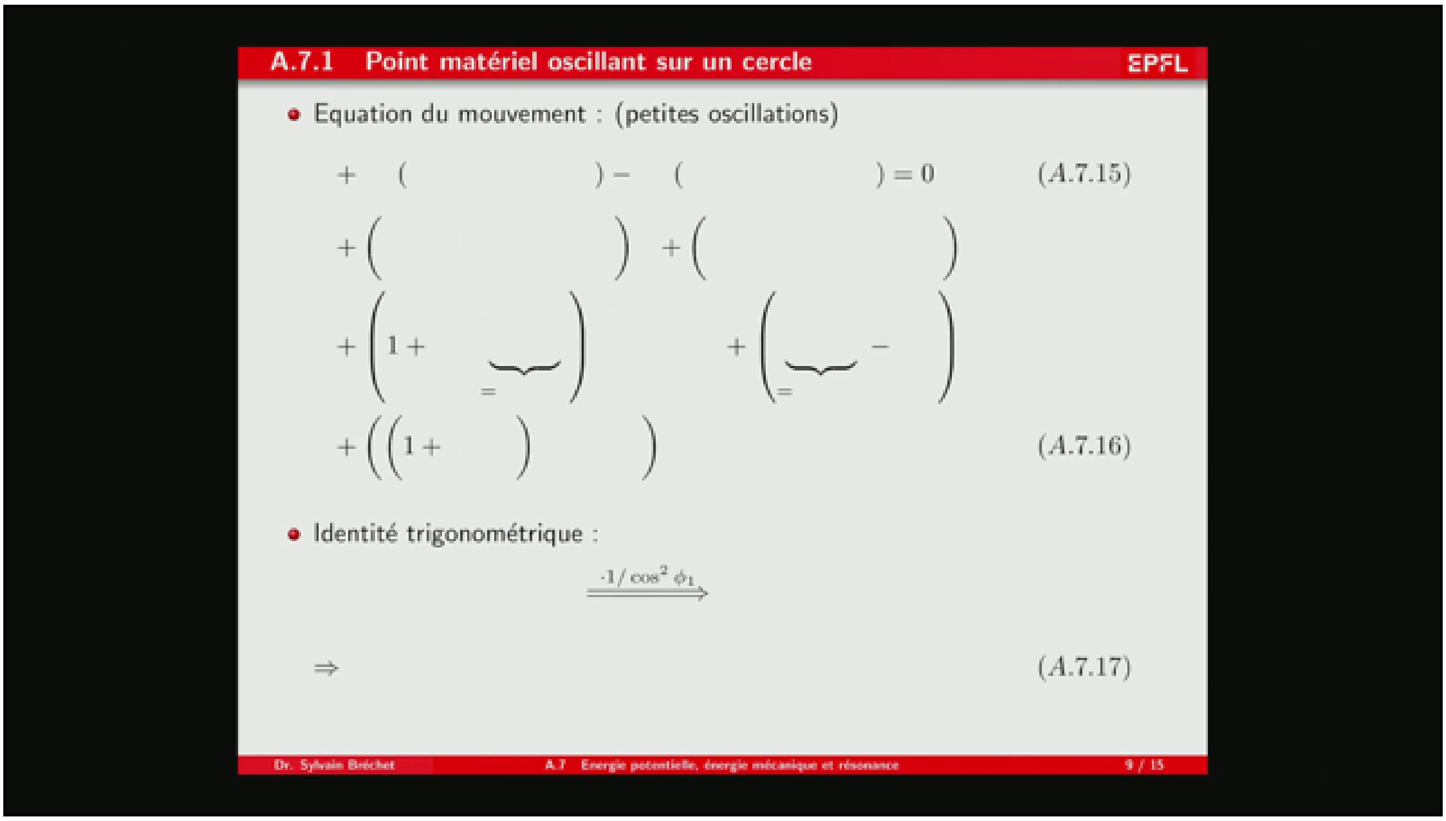
résumé



est constante, donc la dérivé temporelle de l'énergie est nulle. Ok ? Regardez chaque terme. Qu'est-ce qu'ils ont commun ? Ils ont tous un facteur de phi point. R phi point qui est d'ailleurs la vitesse calère le long du mouvement. Quelle que soit la valeur de la vitesse, cette équation doit être vraie. Donc il faut que les termes qui multiplient phi point dans le membre de gauche s'annulent. Au passage, on a le droit de diviser par MR carré. Si on fait ça, on trouve directement l'équation du mouvement. C'est aussi simple que ça. Phi point point, j'assure M, sinuces phi, moins j sur R que sinuces phi est égal à 0. Alors, on l'a l'équation du mouvement même si elle pourrait être plus simple. C'est pas simplement un mouvement harmonico-sigatoire, tout du moins, pas au premier abord. Ok ? Faut qu'on travaille un peu dessus. Surtout que l'angle qui nous intéresse, c'est pas phi. C'est la déviation par rapport à l'angle d'équilibre. L'angle d'équilibre stable qui est phi 1. Donc, nous, ce qu'on veut, c'est d'écrire les petites oscillations autour de phi 1. Donc, on va définir un nouvel angle qu'on appelle alpha. Tention, c'est pas l'accélévation angulaire, c'est un angle. Cet angle alpha, c'est la différence entre l'angle phi et l'angle d'équilibre qui est phi 1.

notes

résumé

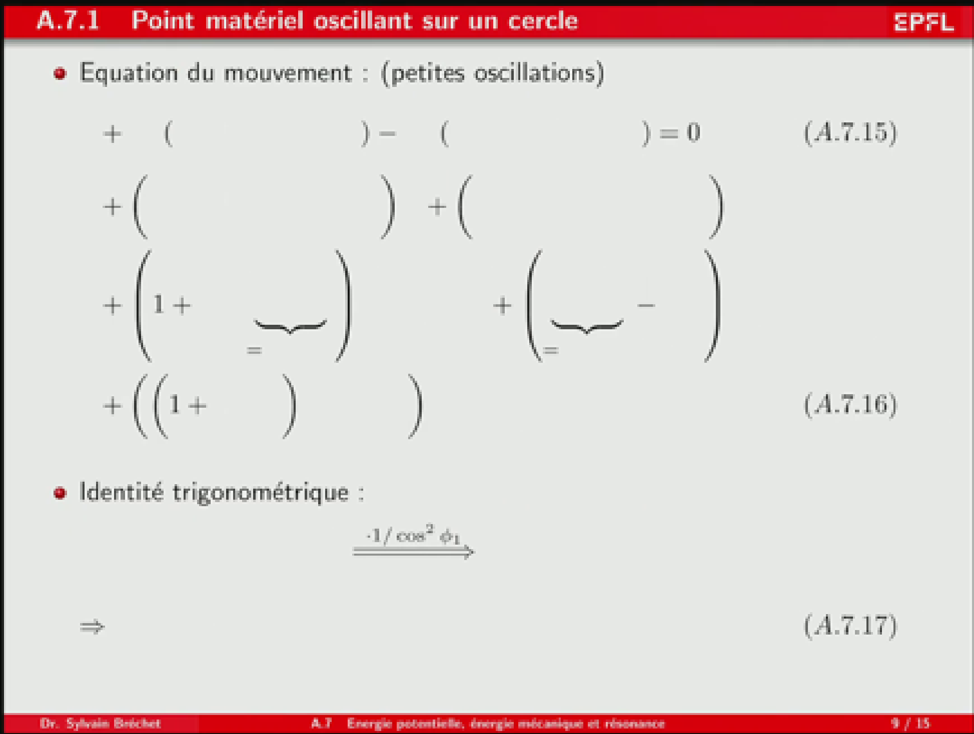


Et comme on est dans la limite des petites oscillations, on va supposer que alpha est beaucoup plus petit que 1. D'accord ? Par rapport au temps, puis une deuxième, on a alors qu'alpha.1, c'est phi.1. On sait aussi que, comme alpha est beaucoup plus petit que 1, le sinus de alpha est à peu près égal à alpha et le cocinus de alpha est à peu près égal à 1. D'accord ? Donc maintenant, on va repartir dans notre équation du mouvement, qui est ici, et la formuler en termes de alpha. On aura donc alpha.1, le cocinus de rèm, fois le sinus de phi, qui se trouve être phi 1 plus alpha, moins g sur r, fois le cocinus de phi, qui est là aussi phi 1 plus alpha, et ceci est égal à 0. Donc, par la force des choses, le sinus et le cocinus sont ici des fonctions trigonométriques d'une somme de deux angles. Donc on a des formules. Le sinus d'une somme de deux angles, le produit du sinus d'un angle fois le cocinus de l'autre, plus le cocinus du premier fois le sinus de deuxième, donc on inverse d'ordre, d'accord ? Et le cocinus d'une somme de deux angles, c'est le produit des cocinus des angles, moins le produit des sinus des angles. Alors, commençons par la formule sur le sinus. On peut donc écrire ceci comme le sinus de phi 1, fois le sinus de alpha. Mais on va directement tenir compte du développement limité au premier ordre, qui nous dit que si alpha est petit, le cocinus de alpha voit à peu près un. Donc ici, on aurait le cocinus de alpha qui voit un. D'accord ? Plus, le cocinus de phi 1 qui multiplie le sinus de alpha et le sinus de alpha c'est alpha. D'accord ? Oui ? Ok. Concrètement, vous pourriez prendre cette équation-là et la multiplier par phi

notes

résumé

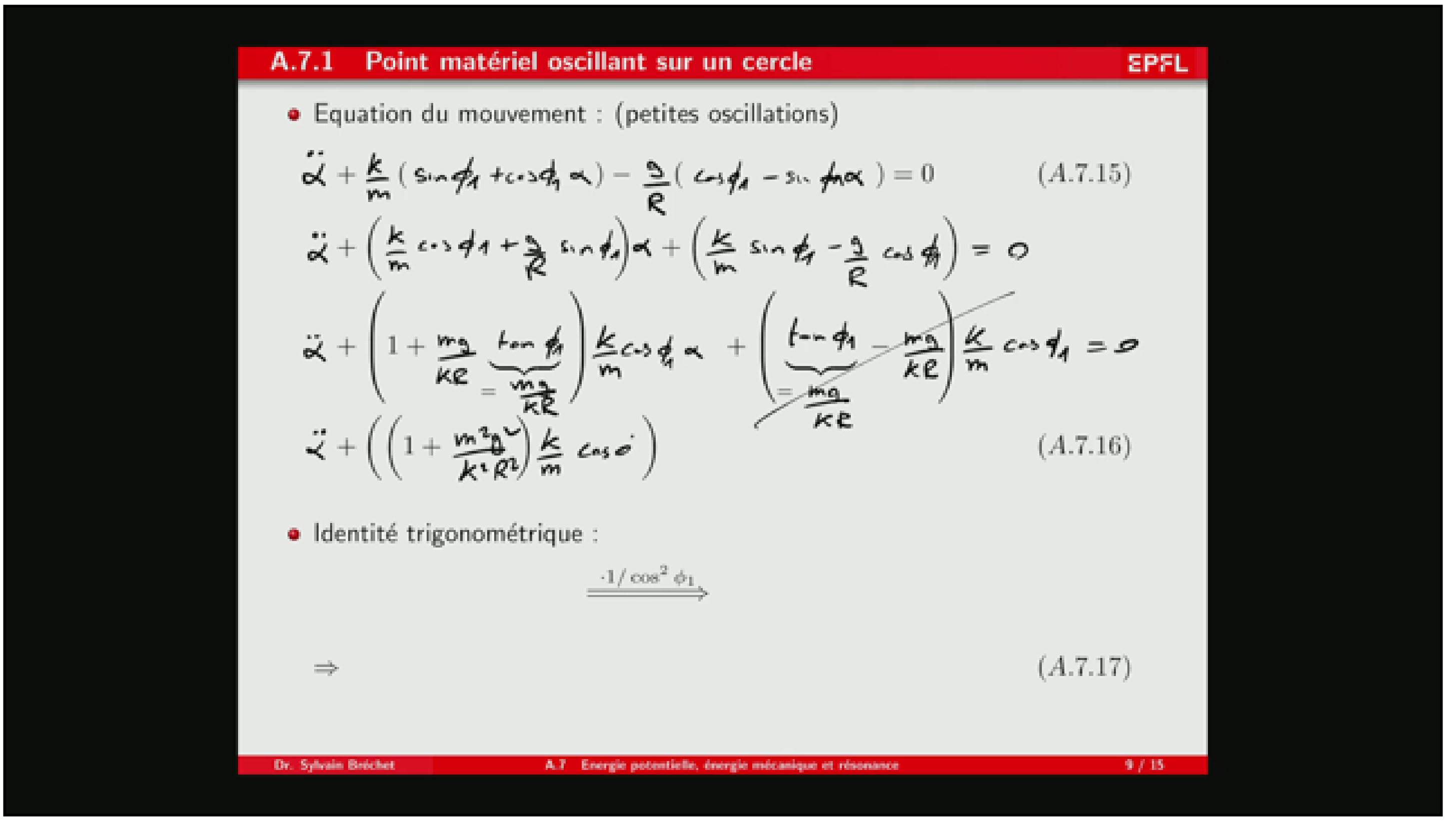
23m 37s



point c'est égal à 0. D'accord ? C'est identique à la première si on divise par une grandeur non nulle qui est mercurée. Maintenant, l'équation que vous voyez avec le phi point qui apparaît ici doit être vraie, quelle que soit la valeur de phi point. Pour garantir cela, la meilleure coefficient qui multiplie phi point sans nulle soit l'ensemble des termes qui est ici. D'accord ? Je ne vous avais jamais entendu dire qu'il faut diviser par phi point, parce que phi point pourrait être nulle. En revanche, il faut que l'ensemble des termes qui multiplient phi point doit s'annuler puisque quelle que soit la valeur de phi point, l'équation doit être vérifiée. D'accord ? Comme vous avez un phi point partout, mettez le phi point en facteur et vous dites que comme ça doit être nulle, il faut que les termes qui multiplient phi point sont finalement mathématiques qu'on est en train de faire. Ok ? Alors maintenant, pour la deuxième formule de trigonométrie, le cosineus de la somme de phi1 et de alpha c'est le cosineus de phi1 fois le cosineus de alpha qui voit à peu près 1, donc je ne l'équipe pas, moins le sineus de phi1 fois le sineus de alpha qui voit à peu près alpha. Donc voilà le développement limité au premier ordre, quand alpha est petit, de la formule de trigonométrie du sineus et du cosineus d'une somme de deux ans qu'on va maintenant mettre à profit puisqu'on va revenir sur l'équation du mouvement

notes

résumé

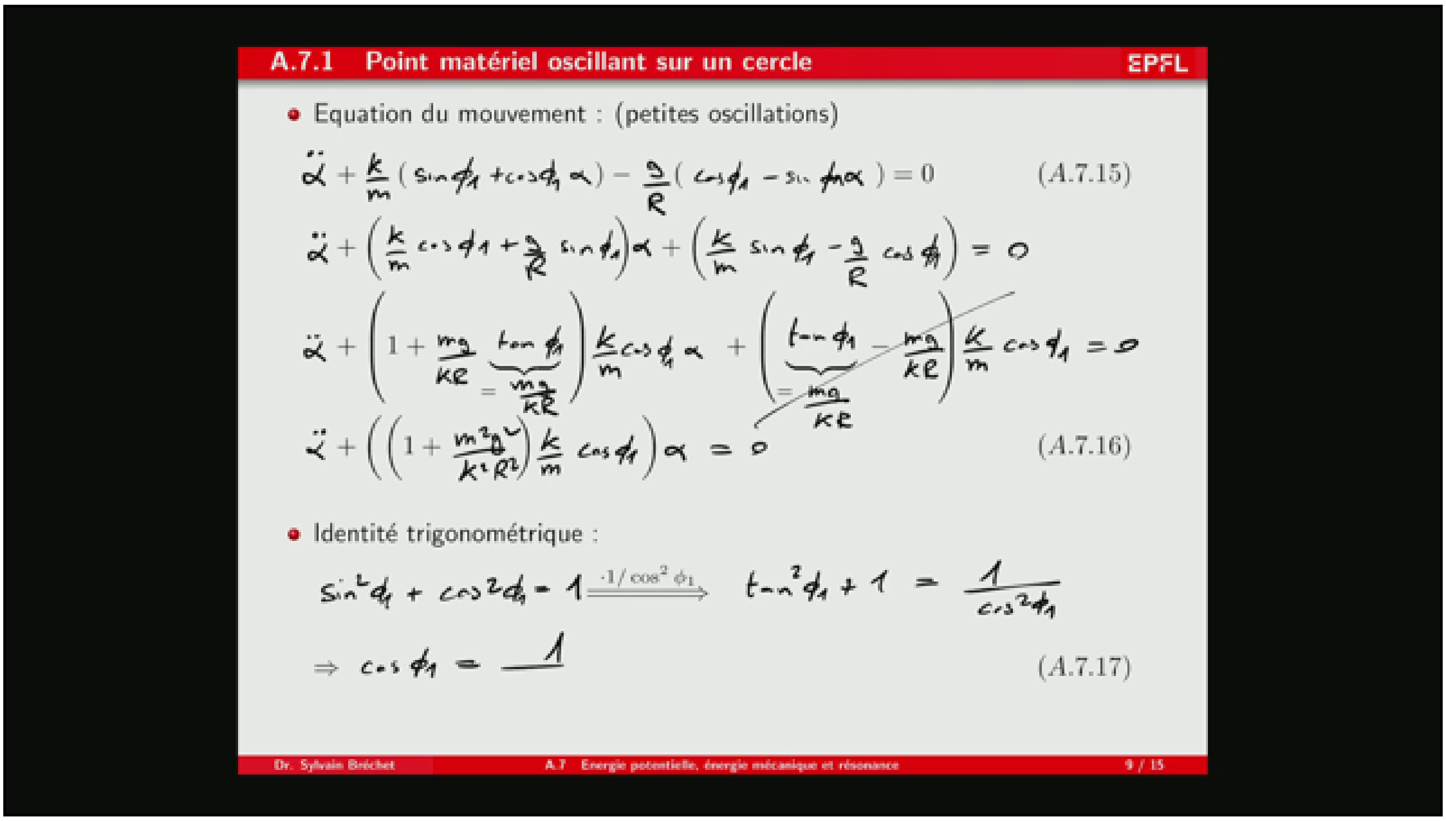


et la réécrire. On aura alpha point point plus qu'à suren, moi j'ai déjà préparé un peu le terrain, qui multiplie le sineus de phi1 plus le cosineus de phi1 fois alpha c'est simplement une réécriture de l'équation A712 qui se trouve sur le transparent précédent j'ai utilisé les formules A713 et A714 pour écrire le cosineus et le cosineus d'une somme de deux ans. On va remettre tout ceci en forme en regroupant les termes pour factoriser quand c'est possible par alpha. On va remettre tout ceci en forme en regroupant les termes pour factoriser quand c'est possible par alpha. On aura donc qu'à suren fois le cosineus de phi1 plus j'su-r fois le sineus de phi1 et on va se retrouver ici avec un qu'à suren fois le sineus de phi1 moins j'su-r fois le cosineus de phi1 Ceci est égal à 0. Continuons notre opération On a alpha. On connaît la tangente de phi1 donc on va factoriser par qu'à suren et par le cosineus de phi1 On fait ceci pour les deux parenthèses Et donc entre parenthèses ce qui va nous rester ce sera 1 plus mg sur kr fois la tangente de phi1 et dans le deuxième terme c'est la tangente de phi1 moins mg sur kr Or la tangente de phi1 c'est mg sur kr donc cette term' disparaît OK L'a également c'est mg sur kr Et donc on se retrouve avec alpha. Plus 1 plus m² j² qui multiplie ks sur m

notes

résumé

27m 15s

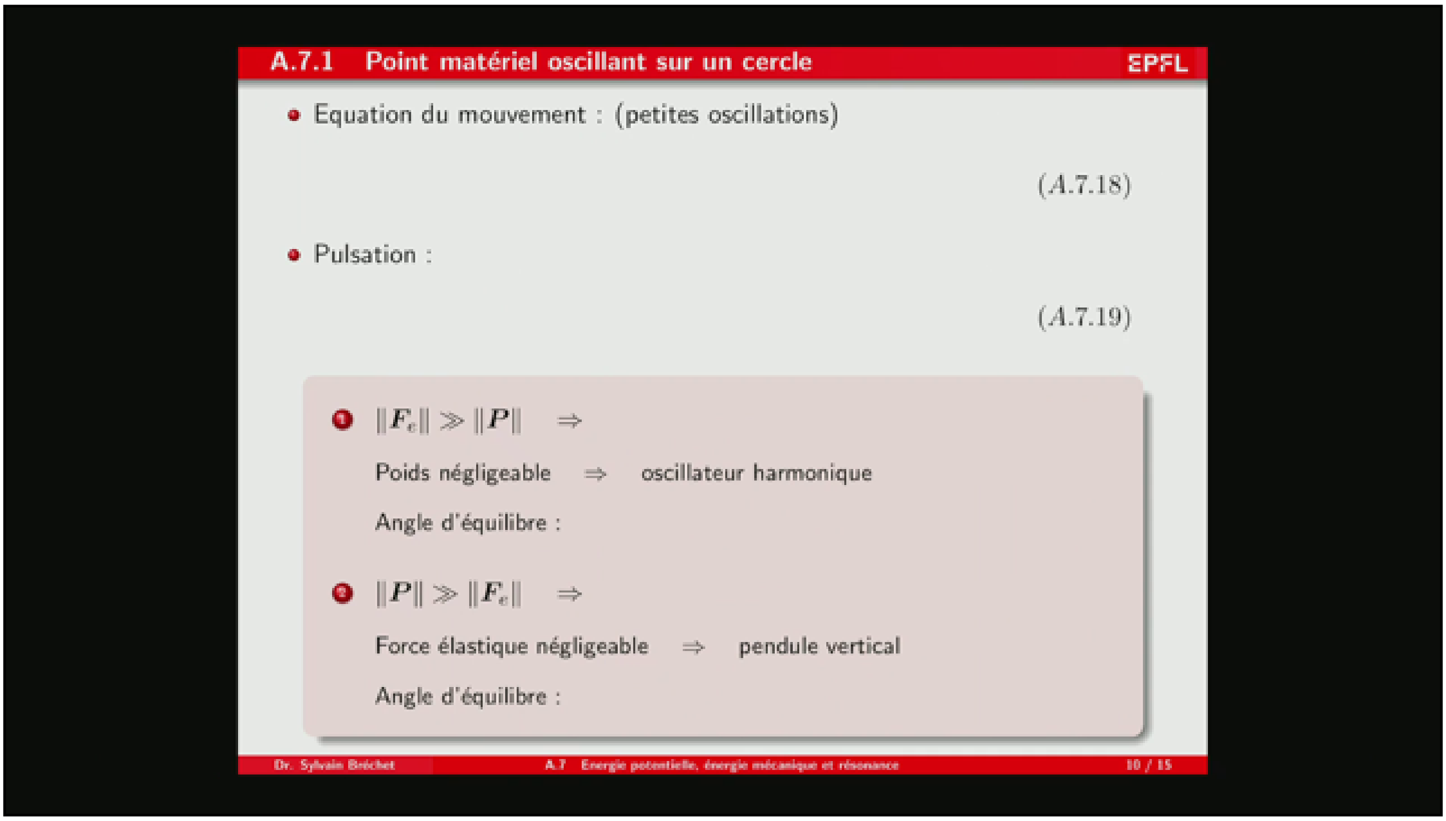


fois le cosineus de phi1 fois alpha qui est égal à 0 On s'approche du but. On veut un mouvement harmonique oscillatoire il faut encore trouver la pulsation qui se cache ici là, la pulsation au carré Donc il va falloir réexprimer le cosineus de phi1 en terme des grandeurs physiques Donnés dans le problème Et donc pour ceci il faut partir on sait que le sinus carré de phi1 plus le cosineus au carré de phi1 est égal à 1 On peut prendre cette relation et la diviser par le cosineus au carré Ce qui fait intervenir la tangente de phi1 au carré plus 1 qui va être égal à 1 sur le cosineus carré de phi1 Nous ce qu'on veut c'est le cosineus de phi1 qui sera donc 1 sur

notes

résumé

29m 26s

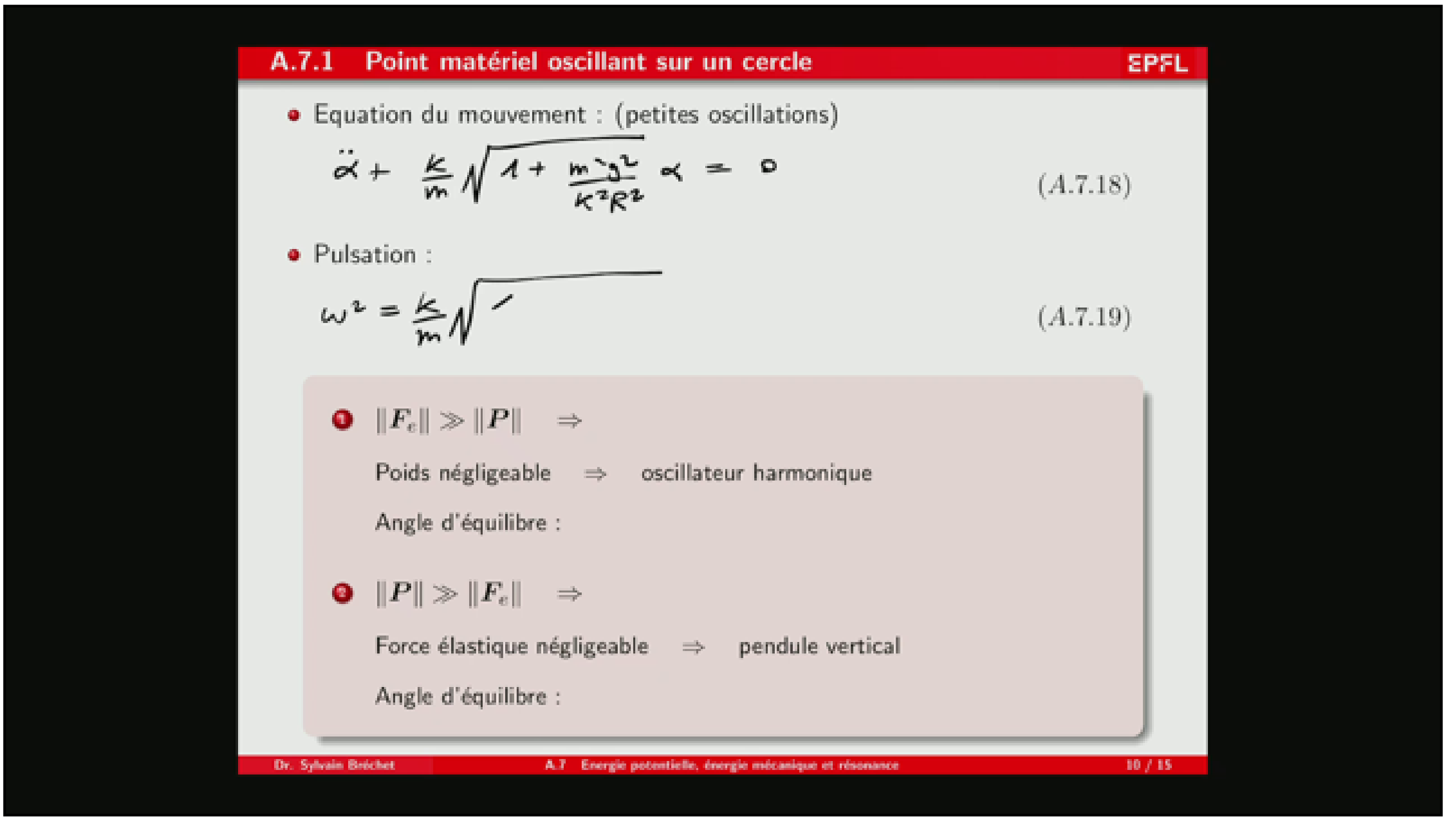


la racine carré de 1 plus la tangente au carré de phi1 Or la tangente de phi1 c'est mg sur karre Donc ceci c'est 1 sur la racine carré de 1 plus m²g² sur k²r² Ok? C'est pas mal. On a réussi à réexprimer le cosineus de l'angle en terme des grandeurs physiques qui sont donnés dans le problème C'est de la trigonométrie appliquée à bonnetion Alors maintenant on va prendre ce cos de phi1 On le substitue ici et on remarque au passage que le préfacteur qui est ici c'est justement le terme qui se trouve sous la racine carré de l'émigrateur donc on se trouve avec une racine carré au numérateur Très bien

notes

résumé

30m 17s

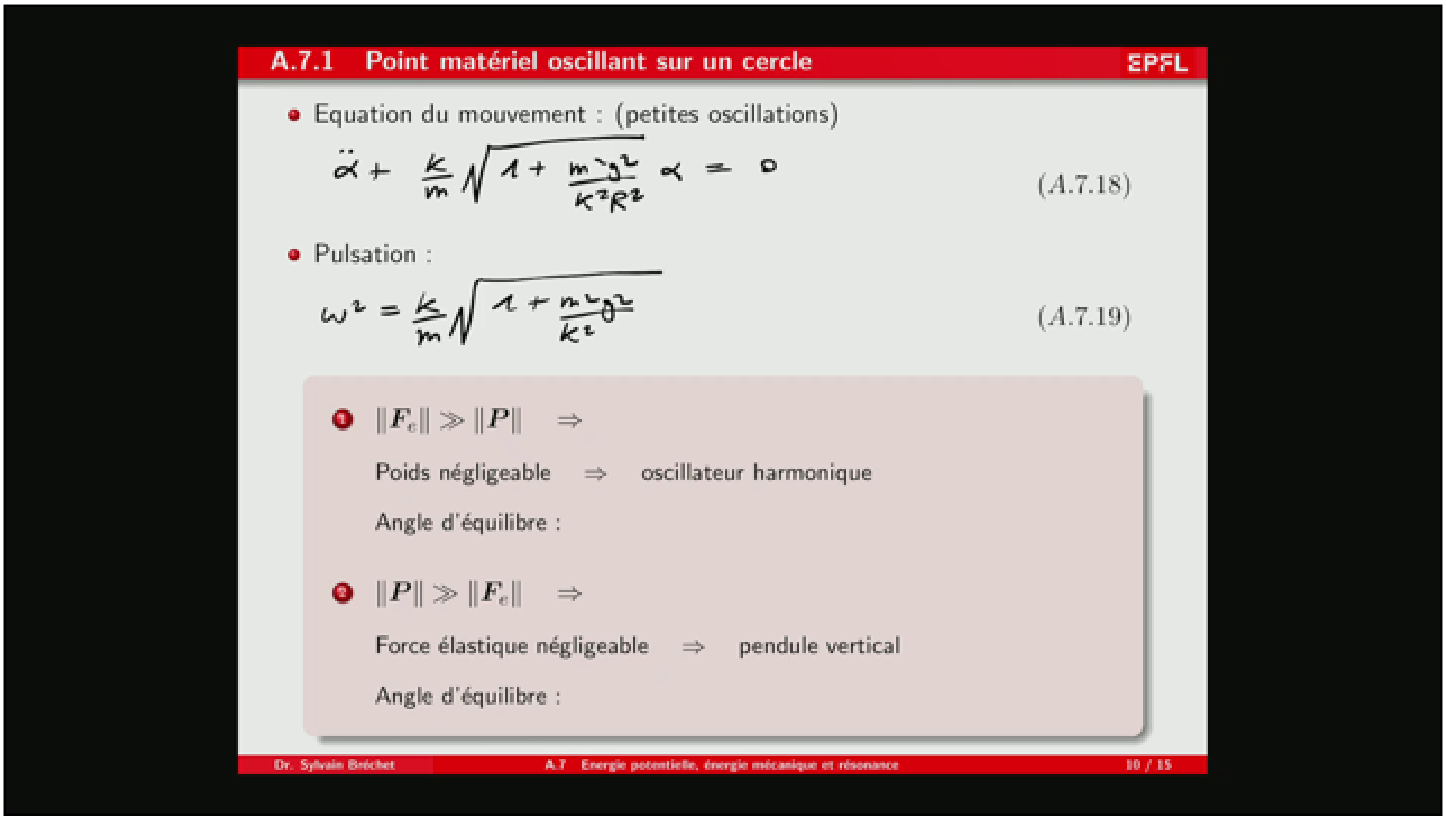


Donc l'équation du mouvement va prendre la forme suivante alpha. plus k sur m qui multiplie la racine carré plus m²g² sur k²r² fois alpha est égal à 0 Bingo on a touché le jackpot puisque on a ici omega carré, l'appuisation au carré Ok? Omega carré donc est égal à k sur m

notes

résumé

31m 5s

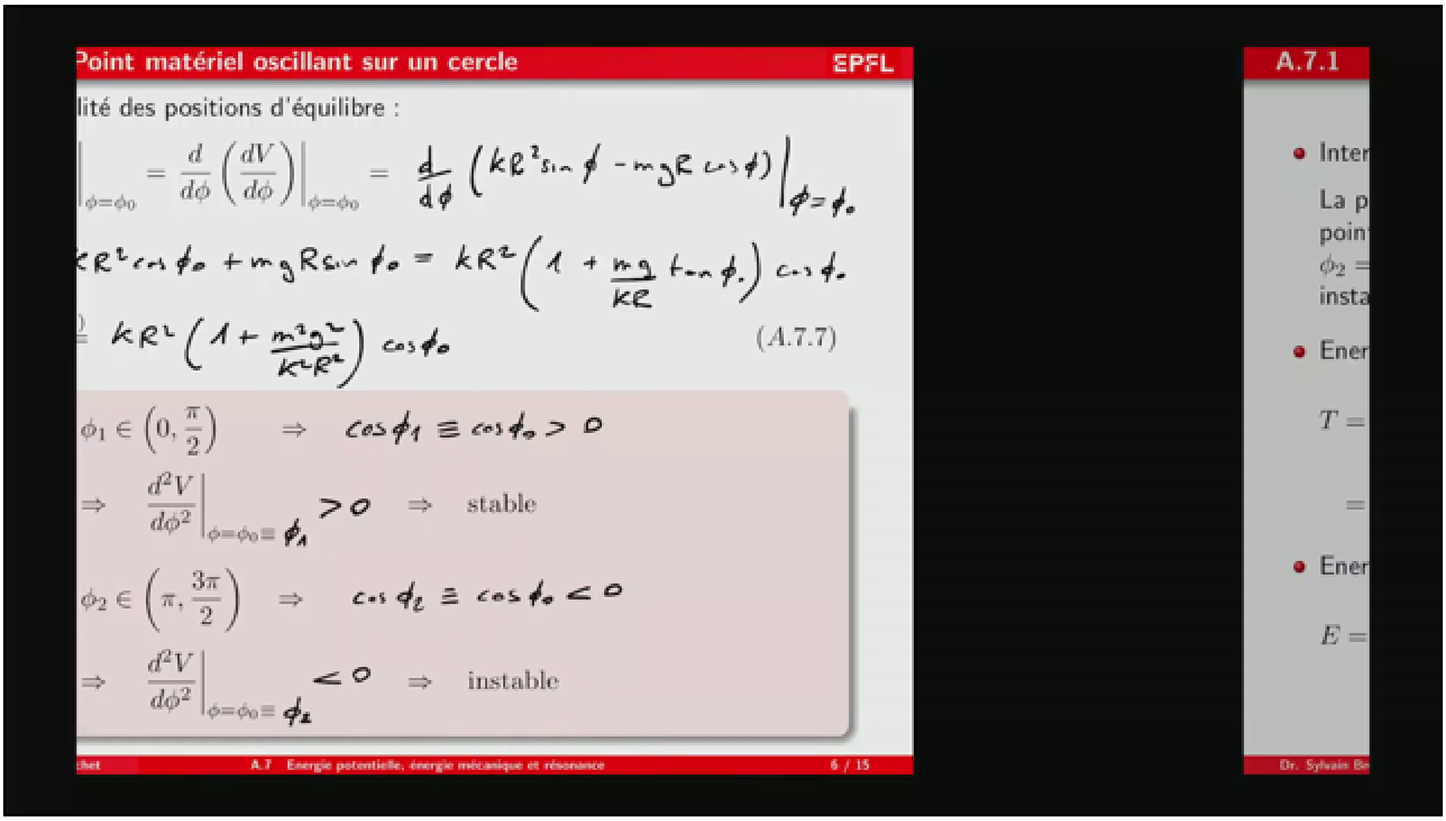


fois la racine carré

notes

résumé

31m 37s

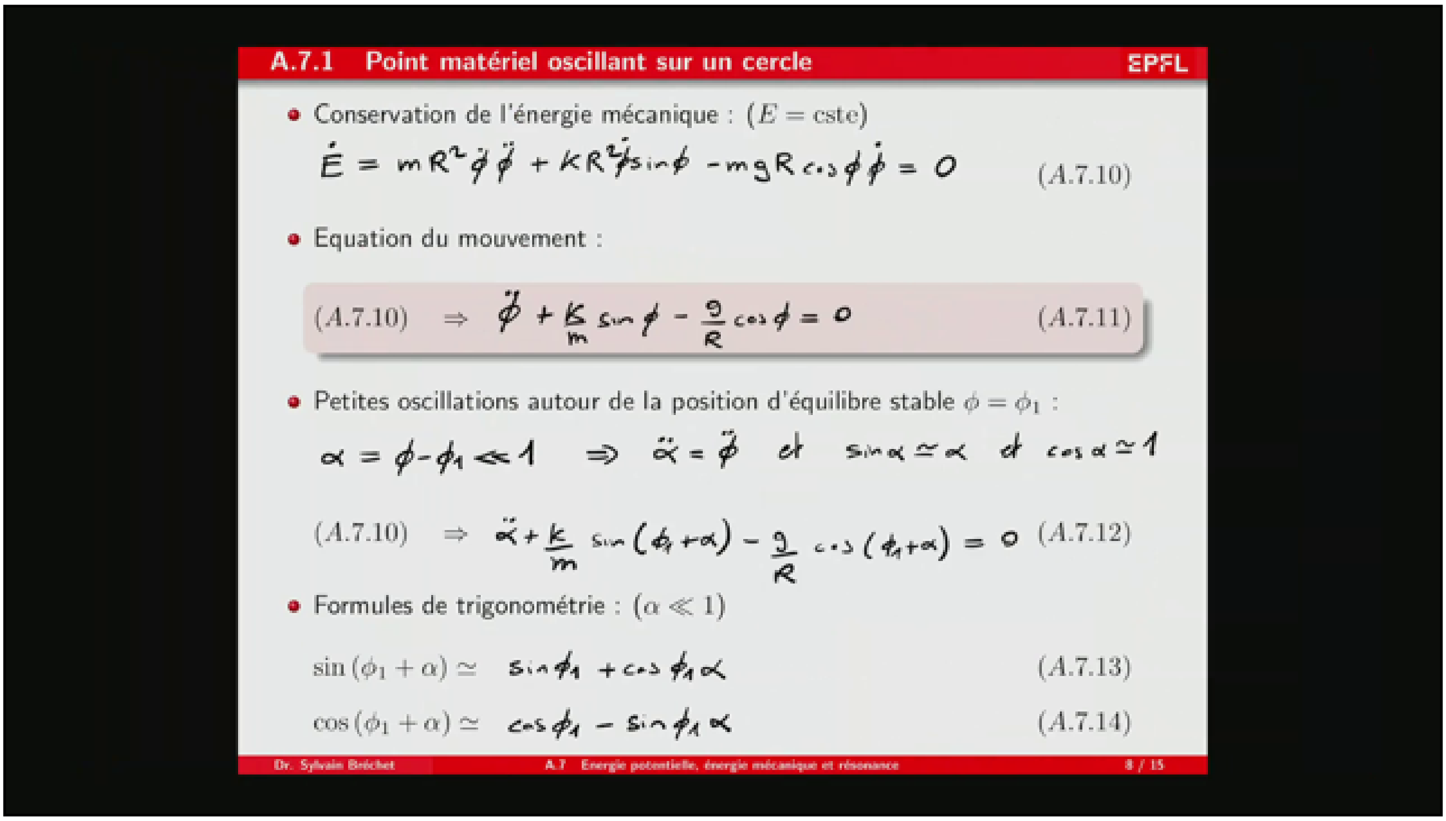


de 1 plus m²g² ce qu'on aimerait faire pour y voir un petit peu plus clair c'est passer le k sur m sous la racine si on fait ça on a la racine carré de k² sur m² plus g² sur r² Alors si on se rappelle de tout ce qu'on a fait jusqu'à présent la racine de g sur une longueur c'est ce qu'on retrouve en fait oui, g sur la longueur va correspondre à la pulsation qu'on obtient pour pour un pendule alors que pour k sur m on va se retrouver avec la pulsation qu'on retrouve pour un mouvement harmonico-sciéatoire d'accord? Donc il y a en fait deux cas limites qui vont apparaître il y a le cas où la force élastique l'emporte sur le poids c'est comme si on avait un poids négligeable dans ce cas là kR est beaucoup plus grand que mg et donc k sur m est beaucoup plus grand que g sur r ce qui veut dire que sous la racine g² sur r² est négligeable par rapport à k² sur m² donc on se retrouve avec un omega² qui est tout simplement k² donc omega c'est la racine de k² c'est un mouvement harmonico-sciéatoire autour de quel point? autour du point d'attache a qui est à la hauteur du centre du cercle donc l'angle d'équilibre devrait être à l'angle nul vérifions prenons l'angle d'équilibre fi 1 prenons maintenant l'arc tangente de mg sur kR dans la limite où kR est beaucoup plus grand que mg l'argument va tendre vers 0 l'arc tangente de 0 c'est 0 donc c'est tendre vers 0 on a un mouvement harmonico-sciéatoire autour du point a si on reprend le dessin

notes

résumé

31m 40s

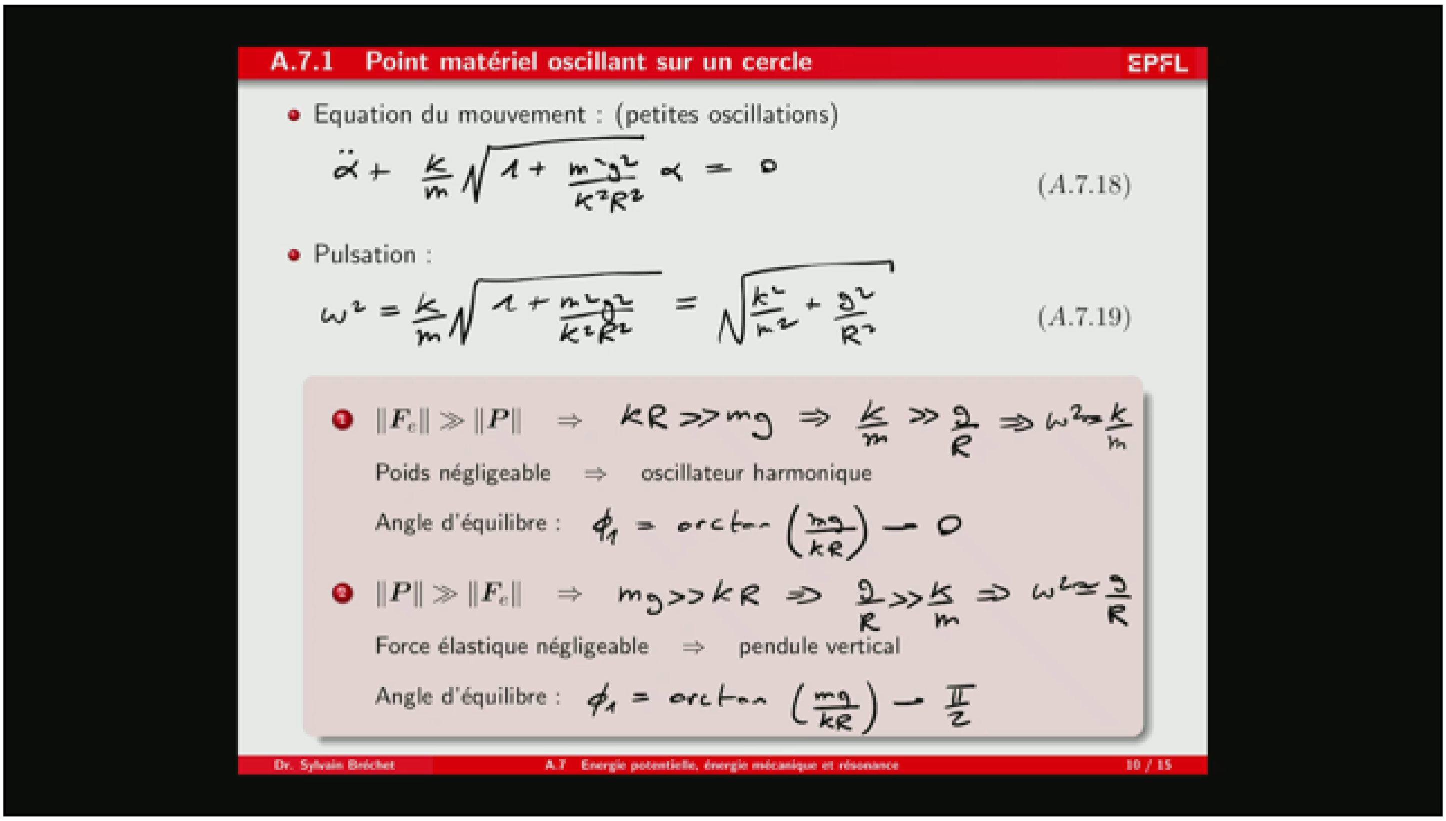


c'est le mouvement qu'on est en train d'écrire dans la limite où le poids est négligeable par rapport à la force élastique alors que va-t-il se passer si c'est le contraire on va avoir un mouvement d'ossiation autour du point qui est ici au bas de notre cercle donc on aura un angle

notes

résumé

33m 51s



d'équilibre qui va tendre vers 0 vérifions donc le poids l'emporte sur la force élastique mg est beaucoup plus grand que kR donc évidemment que jR est beaucoup plus grand que kR ce qui veut dire qu'on va pouvoir négliger kR kKR sur mKR par rapport à jKR sur rKR sous la racine et donc omegaKR va être de la forme approximativement de la forme jR donc omega c'est la racine de jR là on a le comportement d'un pendule vertical d'accord ? ce qui veut dire que notre angle d'équilibre fit 1 qui est l'arc tangente de mg sur kR va tendre vers p sur d pourquoi ? parce qu'en fait kR va être beaucoup plus grand que mg non c'est contraire, pardon mg est beaucoup plus grand que kR d'accord ? donc l'arc tangente de l'infini correspond à un angle p sur d c'est pour une tangente d'un angle p sur d qu'on a un résultat qui tend vers l'infini d'accord ? donc si on revient en arrière

notes

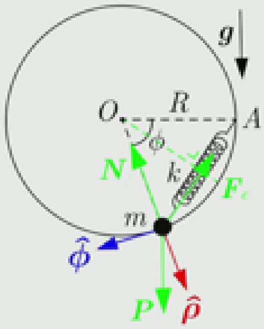
résumé

34m 11s

A.7.1 Point matériel oscillant sur un cercle

EPFL

- Un point matériel de masse m attaché à un ressort de constante élastique k et de longueur à vide négligeable fixé en A se déplace sans frottement sur un cercle vertical de centre O et de rayon R.



- Energies potentielles :
  1. Gravitationnelle : (référence : droite OA)

$$V_g = -mgR\sin\phi \qquad (A.7.1)$$

  2. Elastique : (référence : point A)

$$V_e = \frac{1}{2}k\left(2R\sin\left(\frac{\phi}{2}\right)\right)^2 \qquad (A.7.2)$$

- Energie potentielle totale :

$$V = V_g + V_e = 2kR^2\sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right) - mgR\sin\phi \qquad (A.7.3)$$

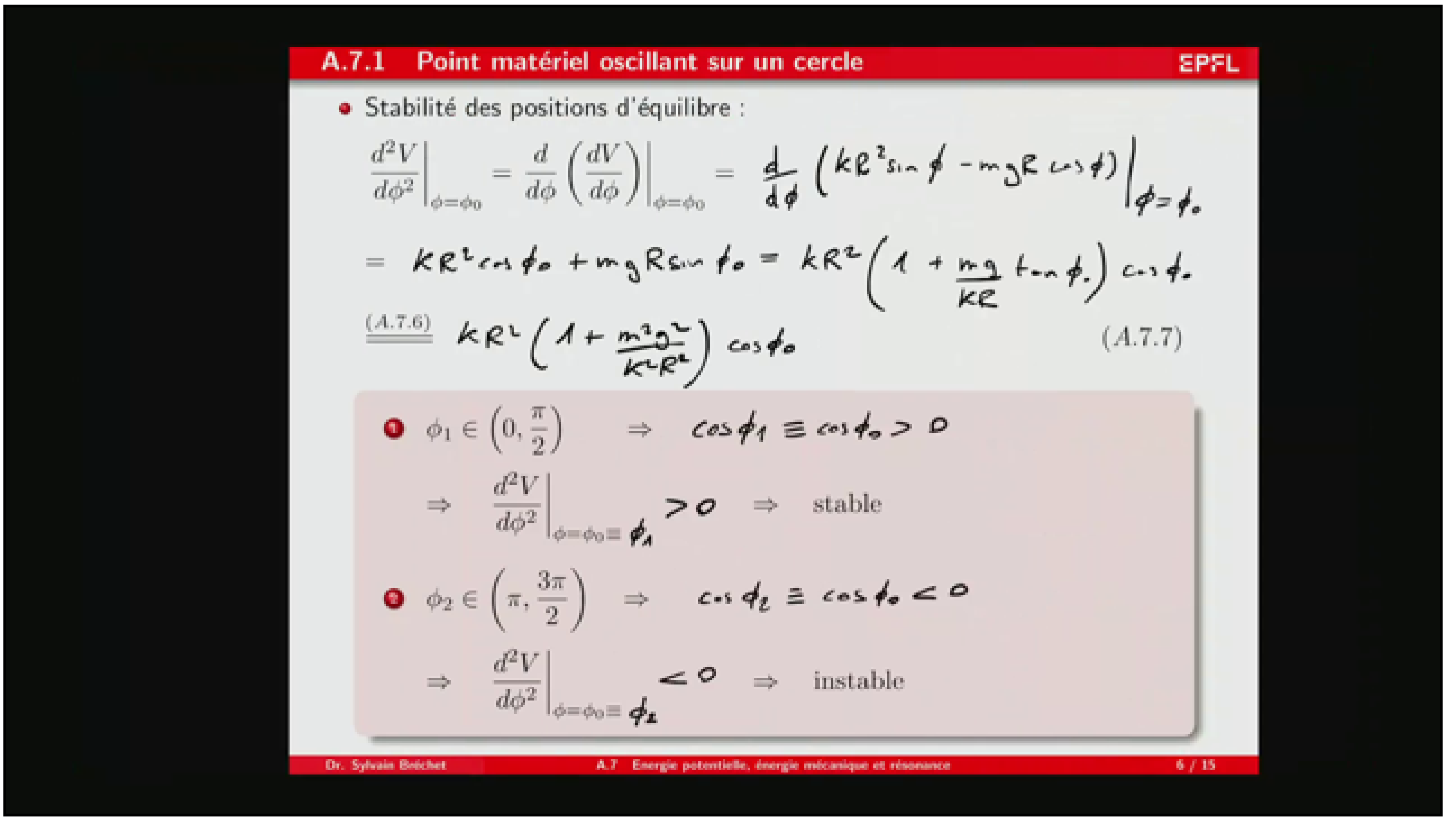
Dr. Sylvain Bréchet — A.7 Energie potentielle, énergie mécanique et résonance — 4 / 15

voilà

notes

résumé

35m 25s

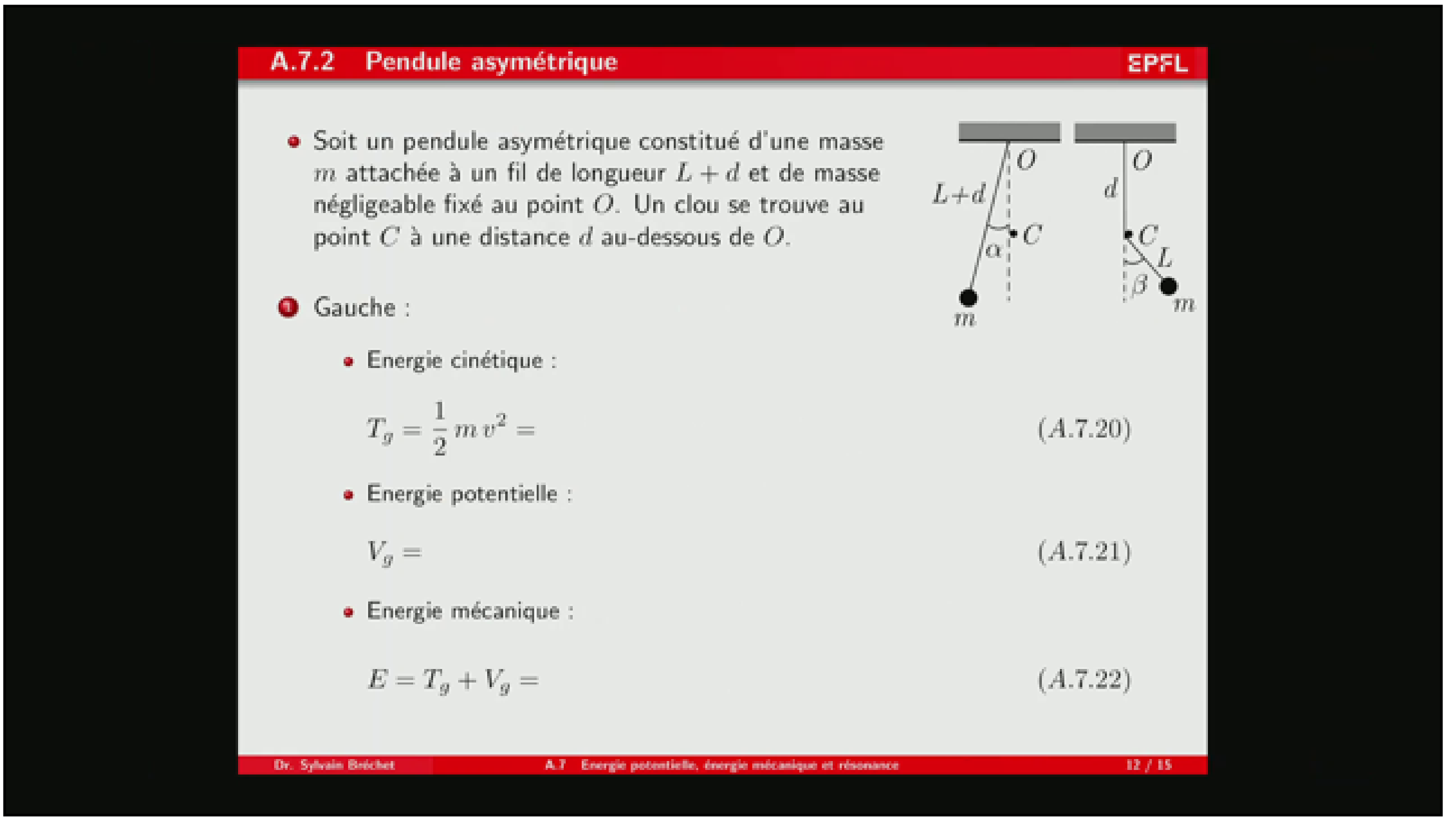


dans le deuxième cas de figure on a le mouvement d'un pendule dans la limite des oscillations autour de la position d'équilibre qui est le minimum qu'on retrouve ici sur le cercle d'accord ? et puis le cas général c'est une combinaison des deux ça paraît assez satisfaisant sur le plan analytique et sur le plan intuitif aussi

notes

résumé

35m 28s

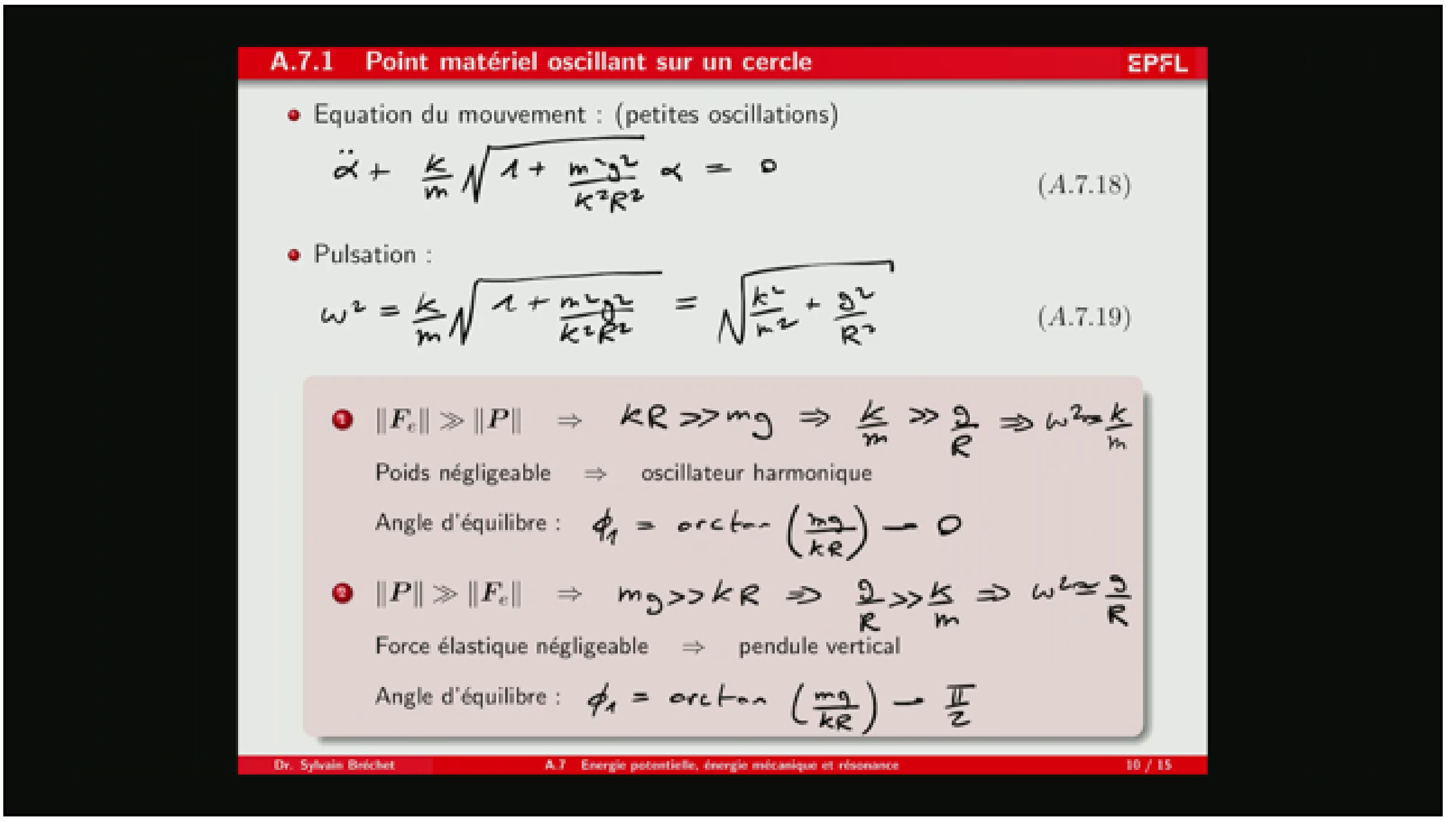


d'accord ? alors ce problème il est assez gratiné il y a eu des problèmes qui allaient un peu dans cette direction mais avec un peu moins d'analyse d'accord ? si je vous donne un mouvement d'ossiation autour d'une position d'équilibre qui n'est pas zéro ça peut être demandé à l'examen mais ça sera plus simple qu'est ce que vous voyez ici enfin vous comprenez l'idée d'accord ? en ayant fait ça si on l'a bien compris on est capable de faire le reste dans le temps qu'il nous reste

notes

résumé

35m 46s



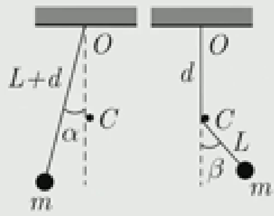
j'aimerais rapidement vous montrer le pendule à symétrie donc faut imaginer la situation suivante oui Martin ? oui alors

notes

résumé

36m 11s

- Soit un pendule asymétrique constitué d'une masse m attachée à un fil de longueur $L+d$ et de masse négligeable fixé au point O. Un clou se trouve au point C à une distance d au-dessous de O.



1. Gauche :
   - Energie cinétique :

$$T_g = \frac{1}{2}\, m\, v^2 = \tag{A.7.20}$$

   - Energie potentielle :

$$V_g = \tag{A.7.21}$$

   - Energie mécanique :

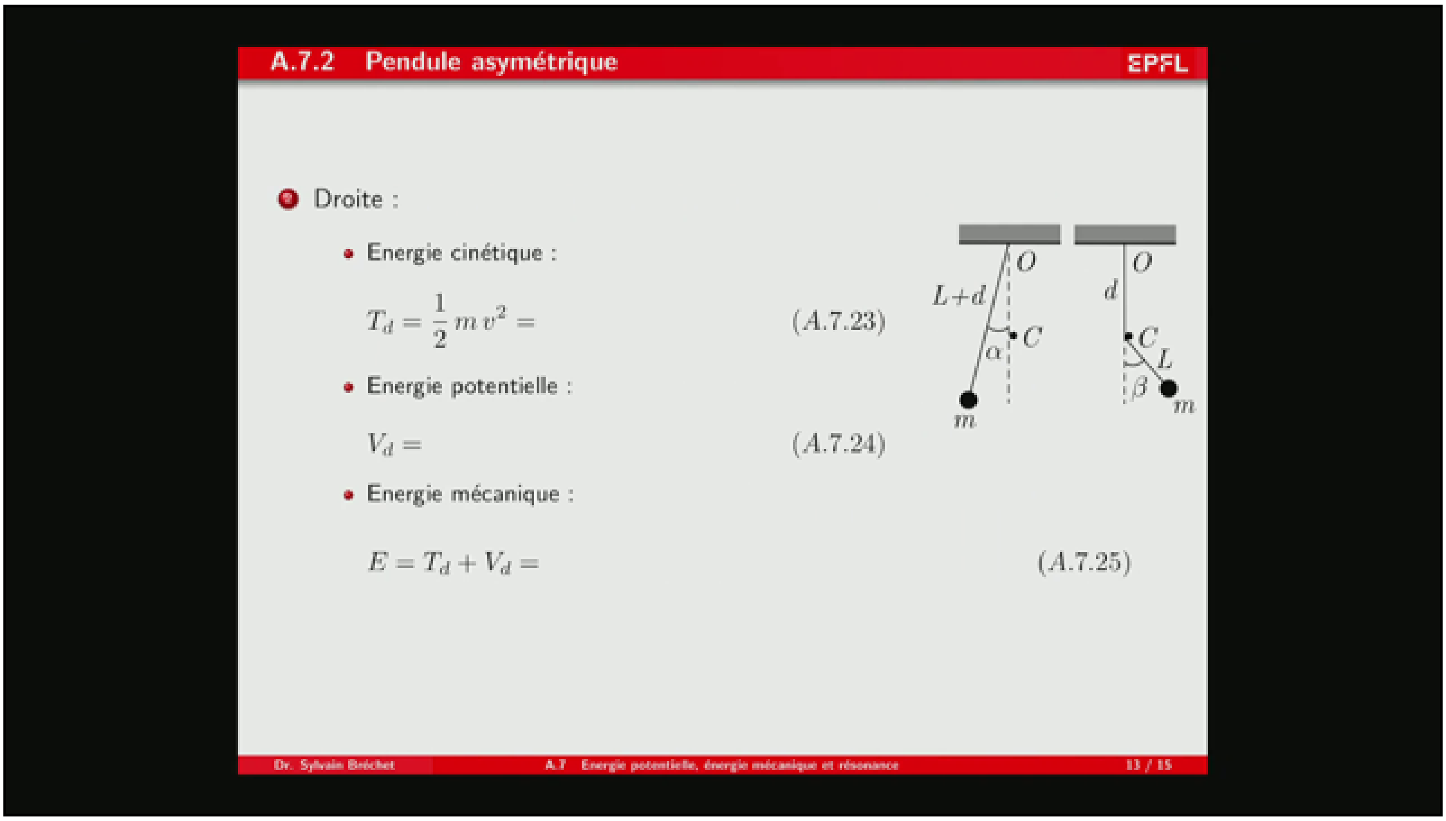
$$E = T_g + V_g = \tag{A.7.22}$$

hop

notes

résumé

36m 23s

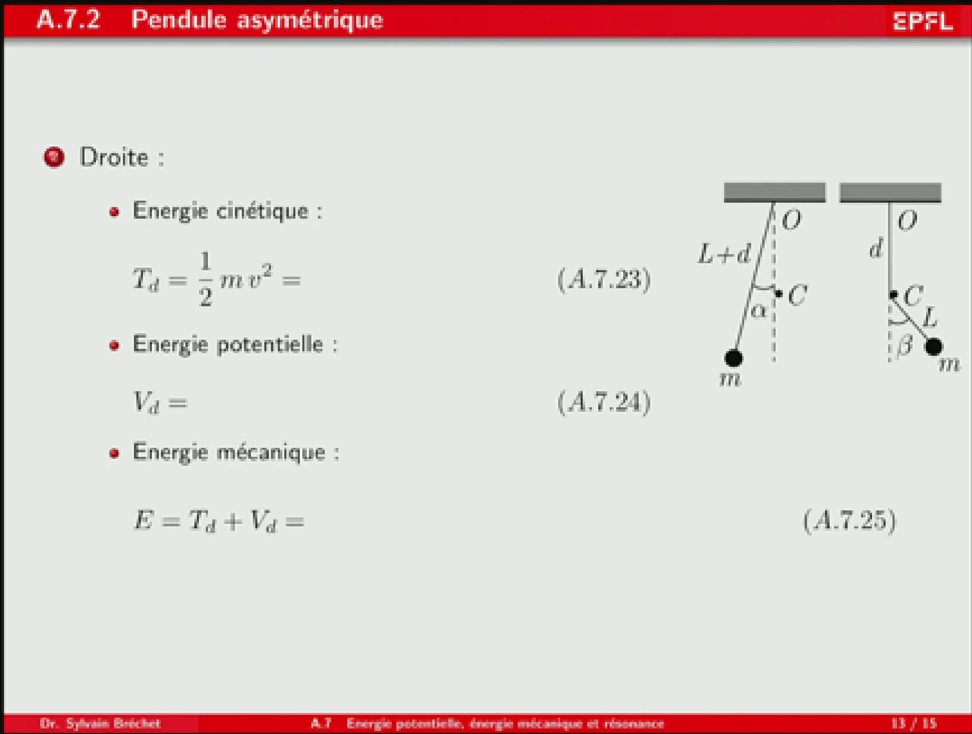


donc pour le pendule à symétrique dans l'examen théorie qu'on a un clou c'est difficile de le faire avec un clou donc on a remplacé le clou par un morceau de tuyau donc vous avez d'un côté sur votre gauche vous avez un point matériel attaché un fil supposé que ce fil a une longueur des plus ailes vous avez un clou ici c'est de morceau de tuyau qui se trouve à une distance d'en dessous du point attaché d'accord ? donc lorsque le pendule aussi à gauche il aussi sur toute sa longueur à droite seulement sur le reste de la longueur d'accord ? donc il y a une asymétrie vous voyez que à droite il aussi plus vite qu'à gauche d'accord ? c'est ce qu'on aimerait maintenant montrer alors dans notre exemple théorique on a un fil et longueur L plus D le clou se trouve à une distance D en dessous du point attaché et on va d'abord regarder la dynamique de notre pendule sur la partie gauche d'accord ? écrivons l'énergie cinétique à gauche qui est une demi de la masse fois la vitesse au carré alors c'est une demi de la masse et pour la vitesse il faut imaginer la trajectoire qui est en marque de cercle ici avec un rayon qui est L sur D autour du point attaché l'angle c'est un angle alpha la vitesse angulaire c'est alpha point on aura donc le rayon soit R plus D élevé au carré fois alpha point carré l'énergie potentielle maintenant c'est une énergie potentielle de pesanteur on va prendre la référence d'énergie potentielle au niveau du plafond d'accord ? donc il faut identifier la distance verticale la corne verticale qui est simplement la projection ici du fil selon l'axe vertical donc selon le cathète adjacent à l'angle alpha c'est donc L plus D fois le cosine de alpha on aura donc moins mg qui multiplie

notes

résumé

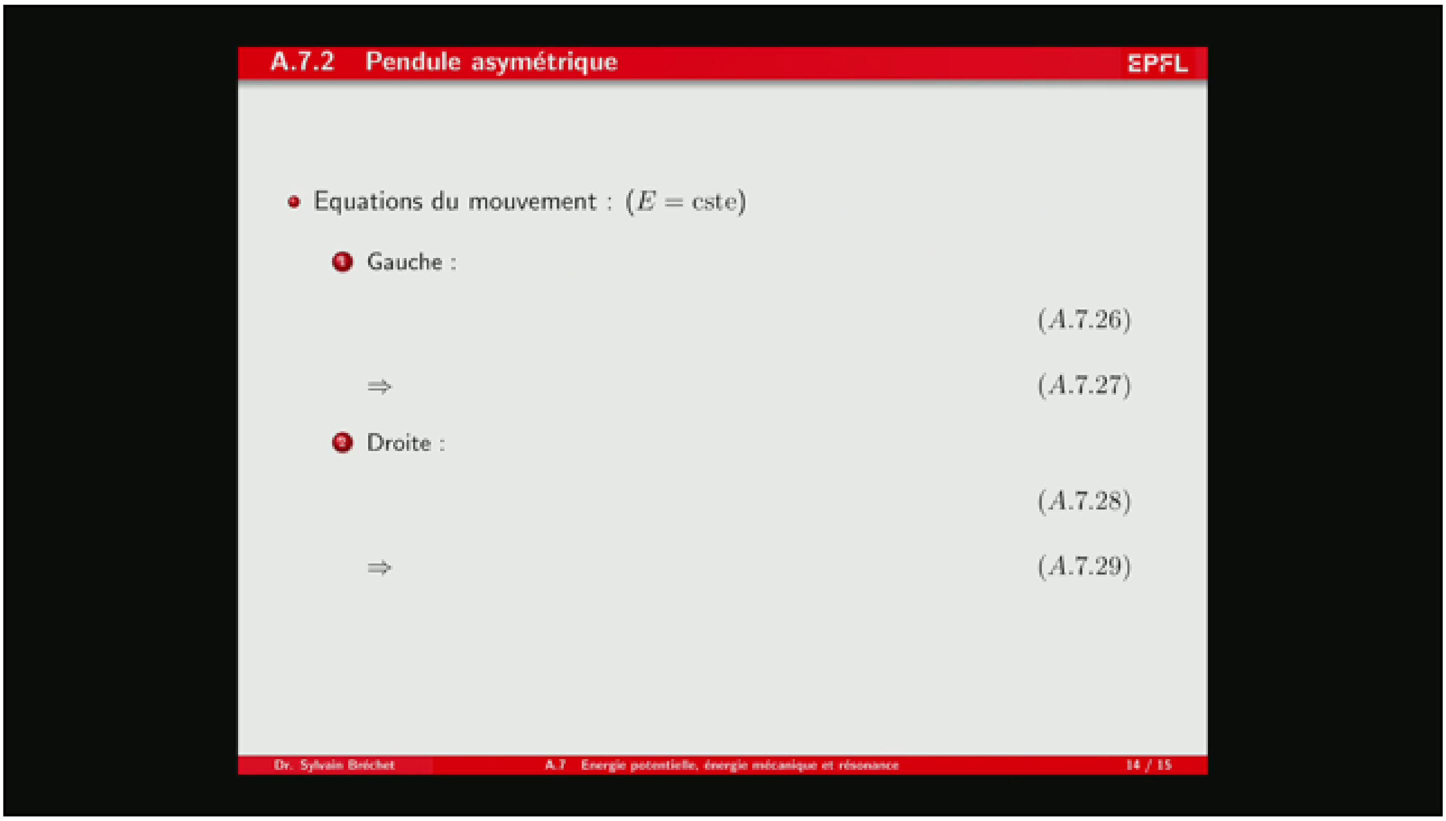
36m 27s



L plus D fois le cosine de l'angle alpha l'énergie mécanique maintenant on peut vous dire l'énergie mécanique de gauche mais comme l'énergie est constante elle sera la même à gauche et à droite l'énergie mécanique c'est la somme à gauche de l'énergie scientique et d'énergie potentielle ce sera donc une demi de la masse qui multiplie L plus D au carré fois alpha point carré moins mg qui multiplie L plus D fois le cosymus de alpha on va maintenir le suspense et avant d'écrire le mouvement dans le détail on va aller explorer ce qui se passe maintenant à droite

notes

résumé

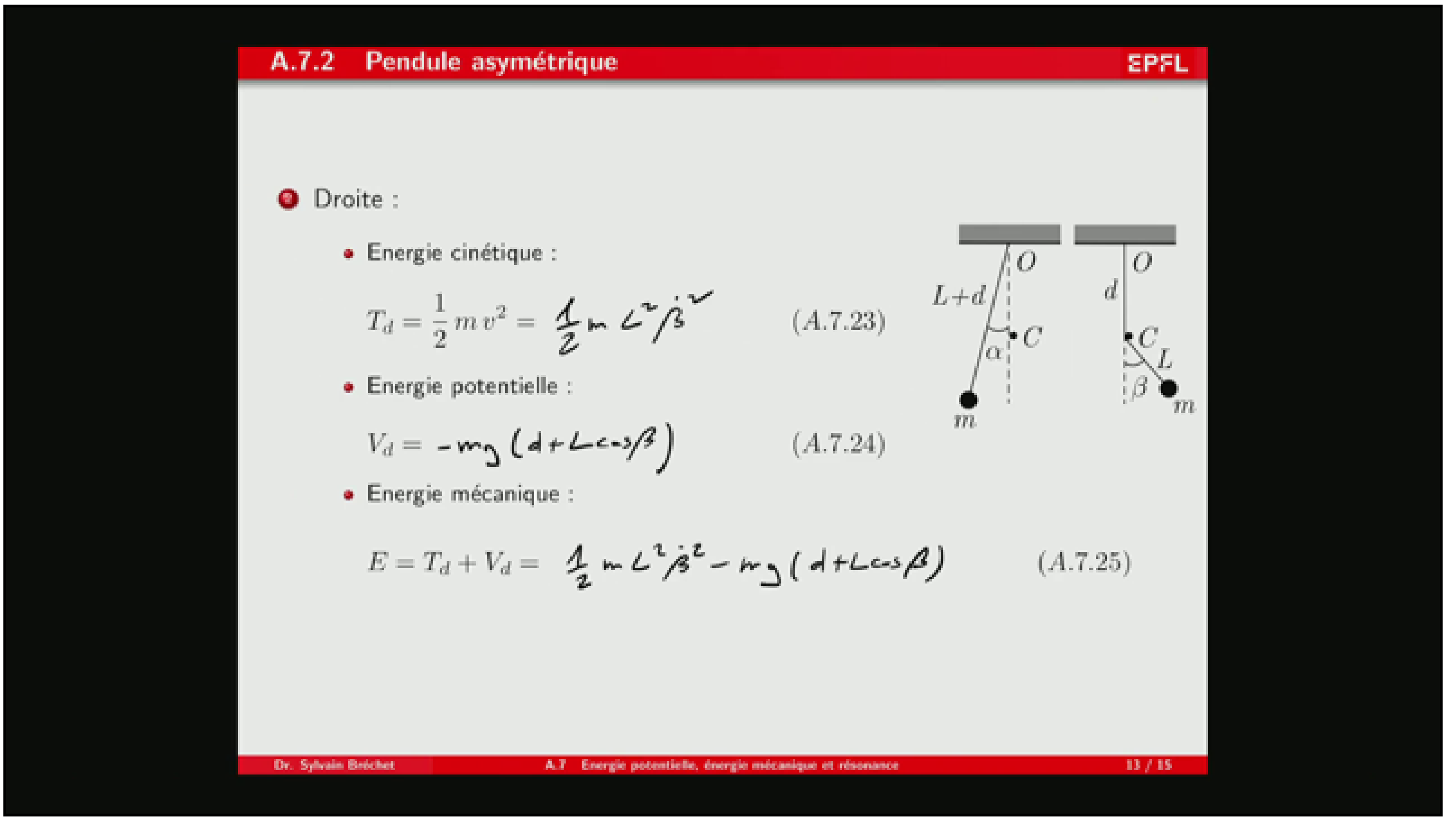


alors à droite attention le mouvement de oscillation ne se fait pas autour du point O mais autour du point C autour du clou donc ici le rayon c'est pas L plus D c'est seulement L donc quand on écrit l'énergie cinétique c'est une demi de la masse il faut le rayon au carré fois la vitesse angulaire qui la dérive est temporelle de langue beta donc c'est beta point carré qu'en est-il de l'énergie potentielle maintenant pour la trouver il faut regarder la corneille verticale alors d'une part c'est moins D pour aller de OAC pour aller de C à la hauteur du point il faut encore projeter le fil de longueur L sur l'axe vertical pour jeter sur le cas-tête adjacent ce sera L fois le cosine de beta on aura donc moins MG qui multiplie D plus L fois le cosine de beta l'énergie mécanique maintenant c'est la somme des deux c'est donc une demi de M L carré beta point carré moins MG qui multiplie D plus L fois le cosine de beta on aimerait trouver l'équation du mouvement à gauche comme à droite comment faire

notes

résumé

39m 16s

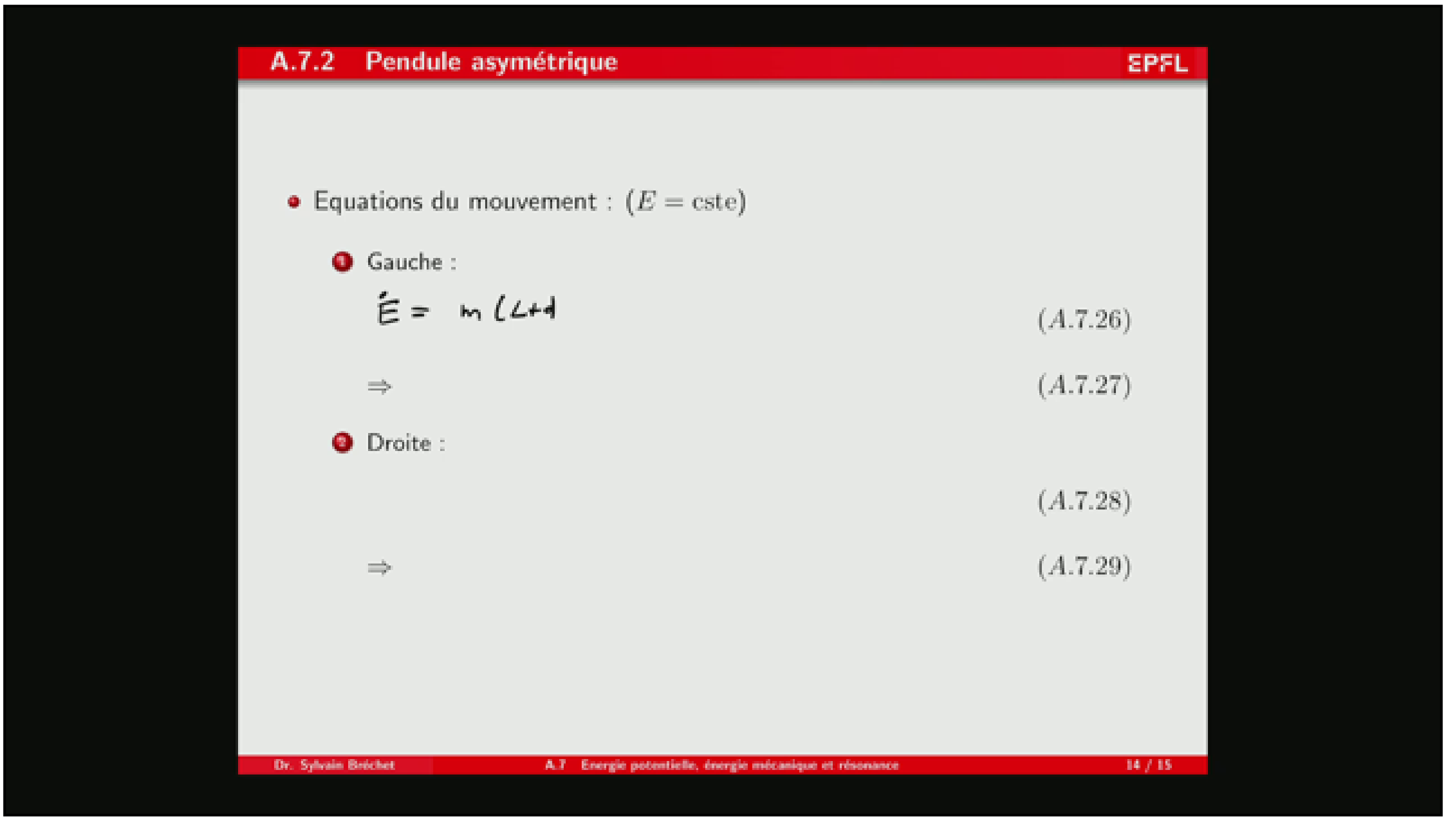


eh bien en tenant compte du fait que l'énergie mécanique est constante que sa dérive temporelle est nulle donc on calcule la dérive temporelle de l'énergie mécanique ce que je vais faire pour que ce soit plus clair au niveau du calcul

notes

résumé

40m 41s

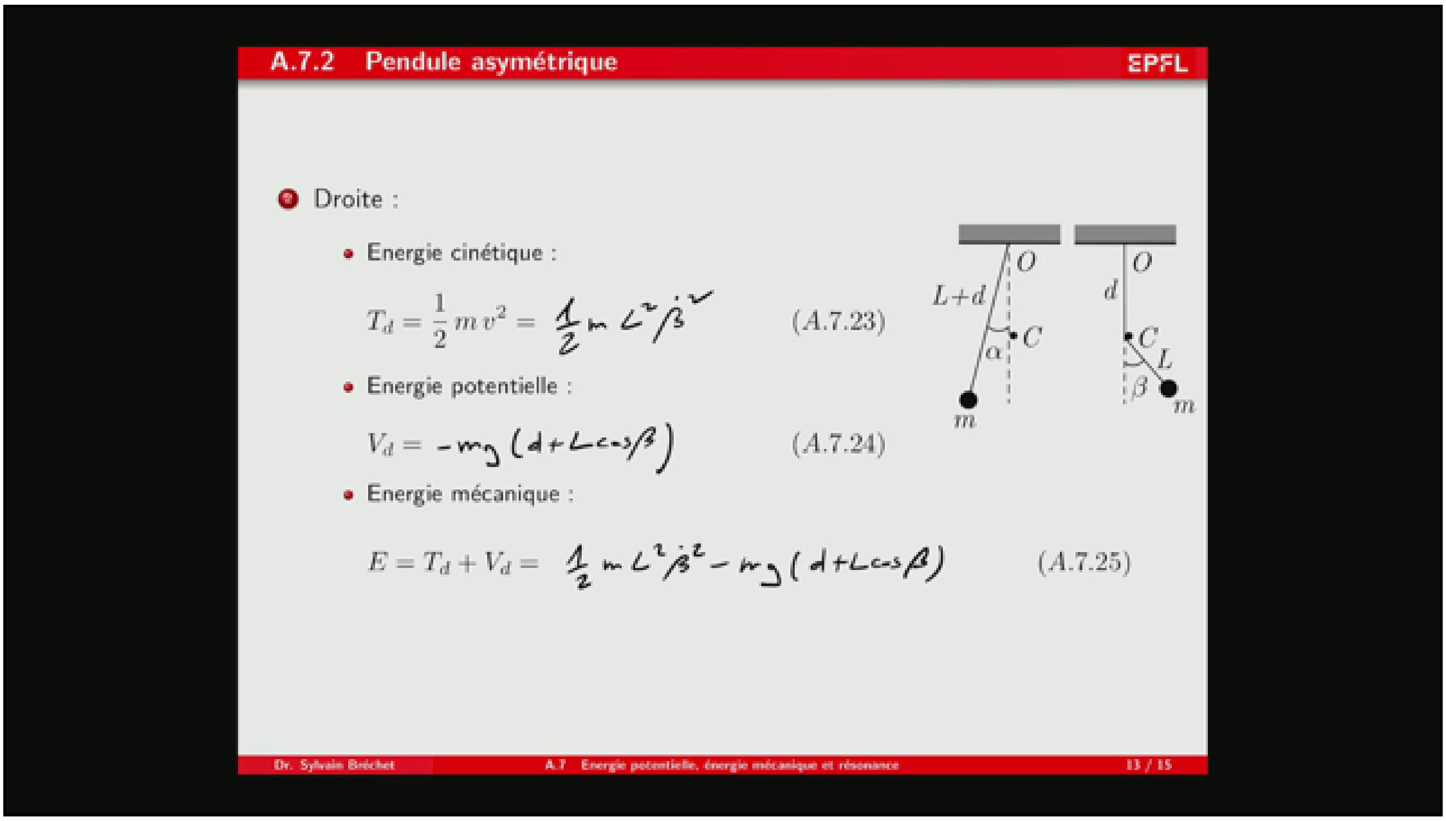


je vais faire un frise de cet écran là maintenant vous avez l'énergie mécanique qui est en bas on la dérive par rapport au temps ok donc M qui multiplie L plus D va rester comme facteur

notes

résumé

40m 59s



L plus D carré et puis ensuite ce qu'il faut dériver par rapport au temps c'est une demi de alpha point carré donc ça va être une demi de 2 fois alpha point fois la dérive interne qui est un alpha point point donc on va se retrouver avec un alpha point point point alpha point ensuite il faut prendre la deuxième termes dans le deuxième terme il faut qu'on dérive l'opposé du cosine de alpha et on a comme pré facteur Mg qui multiplie L plus D la dérive par rapport au temps de l'opposé du cosine de alpha de moins le cos du alpha c'est le signe de alpha fois la dérive interne qui est un alpha point on aura donc le signe de alpha fois alpha point et ceci est égal à maintenant on se retrouve face au problème que vous avez mentionné tout à l'heure avec l'angle phi c'est la même situation ici si vous voulez vous voyez que dans chaque terme il y a un alpha point donc on peut mettre alpha point en facteur donc il faut que la somme des termes qui multiplient alpha point s'annule ces termes là on a le droit de les diviser par une grandeur non nulle qui plus est positive soit Mfois L plus D au carré et si on fait ça on trouve alors que alpha point point plus G sur L plus D fois le sinus de alpha est égal à 0 voilà l'équation du mouvement dans la partie gauche maintenant il faut l'équation du mouvement pour la partie droite alors est ce que tout le monde a fini de noter il est peut être encore à temps de 30 secondes et comme ça je vous redonnerai l'écran avec l'énergie sur la partie droite ok alors c'est ici

notes

résumé

41m 13s

A.7.2 Pendule asymétrique

EPFL

- Equations du mouvement : $(E = \text{cste})$
  1. Gauche :

$$\dot{E} = m(L+d)^2\ddot{\alpha}\dot{\alpha} + mg(L+d)\sin\alpha\,\dot{\alpha} = 0 \qquad (A.7.26)$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{\alpha} + \frac{g}{L+d}\sin\alpha = 0 \qquad (A.7.27)$$

  2. Droite :

$$(A.7.28)$$

$$\Rightarrow \qquad (A.7.29)$$

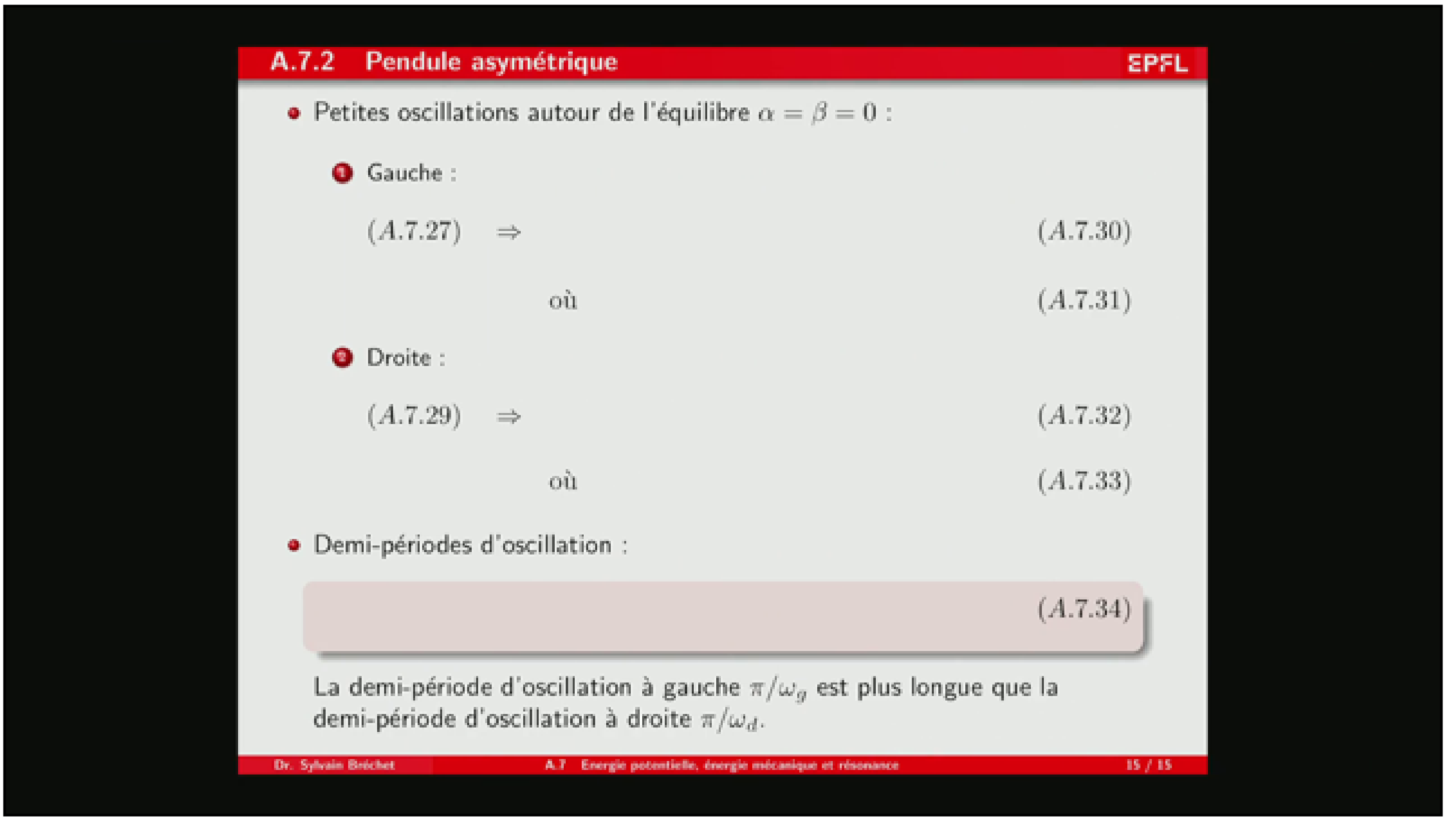
Dr. Sylvain Bréchet — A.7 Energie potentielle, énergie mécanique et résonance — 14 / 15

maintenant dérive par rapport

notes

résumé

43m 1s

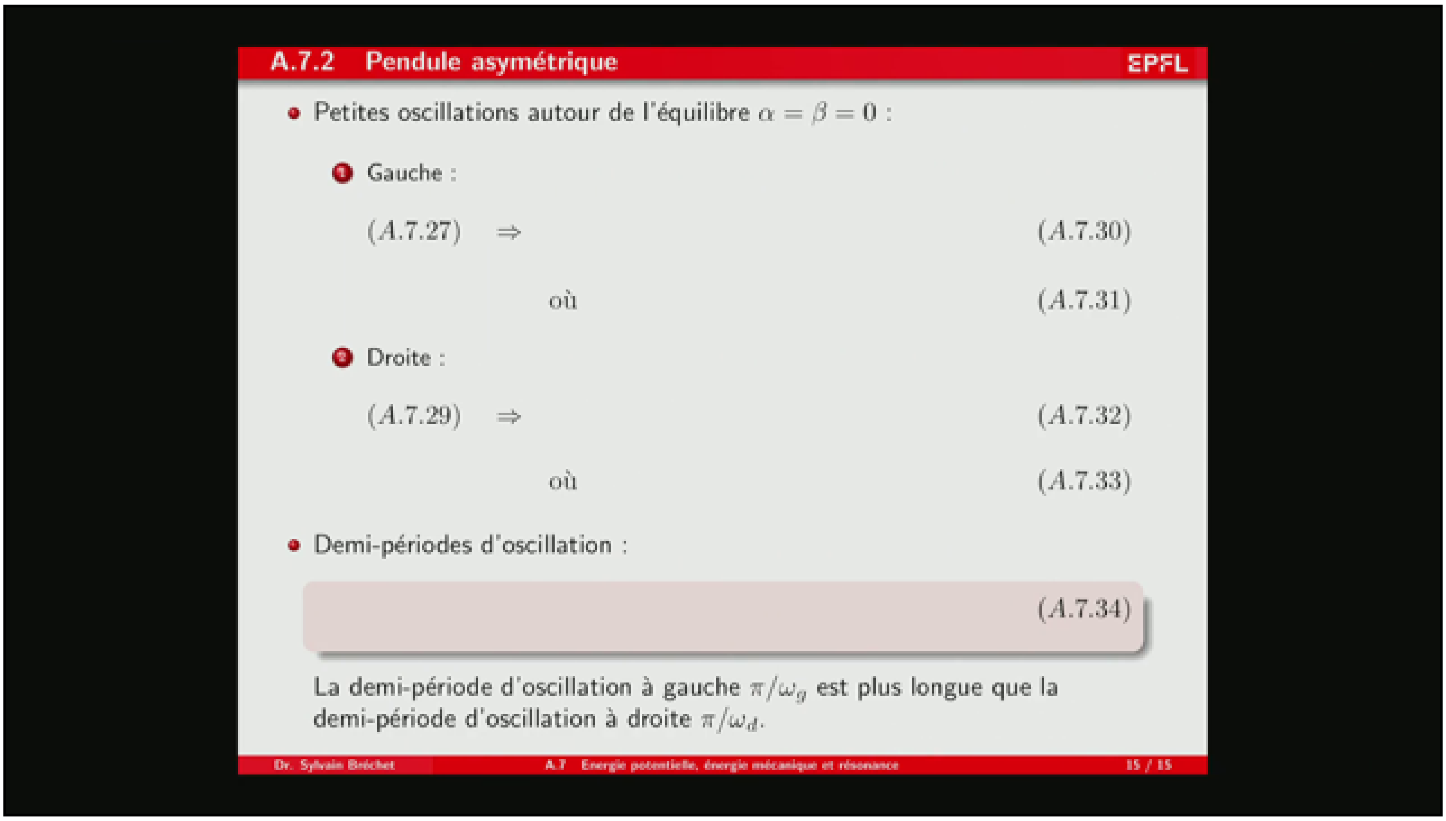


à autant l'énergie qui est donnée ici pour la partie droite ok donc un point ça va être quoi ça va être d'abord le terme constant soit Ml carré et ensuite il faut qu'on dérive par rapport au temps une demi de beta point carré donc on a deux fois une demi de beta point fois beta point point ou écrit dans l'absence de beta point point fois beta point ensuite Mgd c'est une constante si on dérive par rapport au temps ça tombe il va nous rester un Mgl comme constante qu'on va mettre en évidence donc on dérive par rapport au temps moins le sinus de beta il va nous donner le sinus de beta il faut la dériver interne qui est en beta point on aura donc un sinus de beta fois beta point et tout ceci s'annule ok là on est face de nouveau à la même situation dans le membre de gauche on a deux termes qui sont proportionnelles à beta point quel que soit la valeur de beta point il faut que l'équation soit respectée donc il faut que les termes qui multiplient beta point s'annulent ces termes on va les diviser par la masse d'une part mais également par étiquaré et on trouve alors l'équation du mouvement à droite beta point point plus Gsurl sinus de beta qui est égal à 0 voyez qu'elle se ressemble c'est pas les mêmes pourquoi ? parce que la longueur n'est pas la même le fin n'a pas la même longueur à gauche qu'à droite oui est-ce que le E a obtenu absolument le E à droite est égal au E à gauche pourquoi ? parce que l'énergie mécanique est conservée alors on va arriver à l'épilogue sur le slide suivant ok regardons les oscillations autour de la position d'équilibre qui est la position où le fil est vertical donc à gauche l'angle alpha est beaucoup plus

notes

résumé

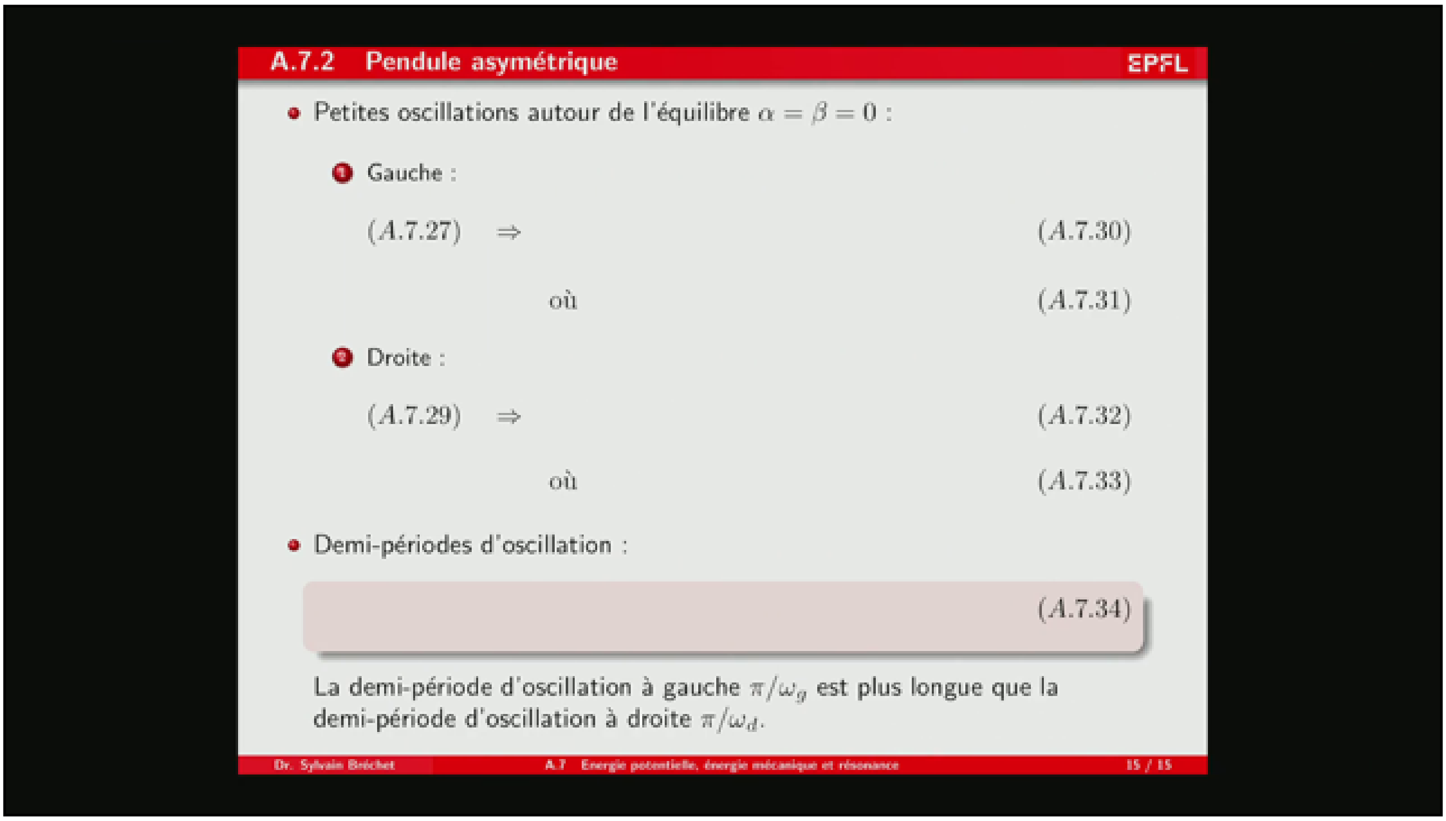
43m 6s



petit que 1 à droite c'est l'angle beta qui est beaucoup plus petit que 1 donc respectivement les sinuses de alpha et de beta vont être à peu près égales à l'angle lui-même d'accord ? donc on va se retrouver avec deux équations du mouvement qui sont de la forme suivante alpha point point plus omega G carré alpha est égal à 0 où omega G carré c'est le carré de la pulsation sur la partie de gauche soit Gsurl plus D et puis à droite on aura beta point point omega D carré beta qui est égal à 0 où omega D carré c'est le rapport de Gsurl ok donc on voit que les pulsations ne sont pas les mêmes qu'est-ce qu'on a vu expérimentalement la demi-periode à droite est beaucoup plus rapide que la demi-periode à gauche quand le fil est plus court le mouvement est plus rapide d'accord ? on parle pas de période c'est des demi-periodes une période c'est de pis sur omega une demi-periode c'est pis sur omega donc omega G est plus petit que omega D d'accord ? et donc la période de s'illation à gauche va être plus longue que la demi-periode de s'illation à gauche à droite à gauche la demi-periode de s'illation c'est pis sur omega G c'est pis sur omega D et voilà le problème est résolu sur ce je vous souhaite une très bonne soirée et on se retrouvera la semaine prochaine pour enfin faire de la mécanique sociale avec la troisième loi de Newton la loi d'action et de réaction on traîtera du problème à deux corps pas de celui à trois corps puisqu'il n'est pas encore résolu pour le problème de la mécanique sociale et de la mécanique sociale et de la mécanique sociale et de la mécanique sociale et de la mécanique sociale et de la mécanique sociale et de la mécanique sociale et de la

notes

résumé



mécanique sociale et de la mécanique sociale et de la mécanique sociale et de la mécanique sociale et de la mécanique sociale et de la mécanique sociale et de la mécanique sociale

notes

résumé